Projekt 1 – Wyprowadzenie wzorów

Niniejszy dokument zawiera wyprowadzenia wzorów używanych przy wstępnych szacunkach oraz do określenia podstawowych danych geometrycznych samolotu i charakterystyk zespołów napędowych. Podane wzory są w większości wynikiem uproszczonych analiz (przyjętych modeli) i mogą różnić się od tych, które są prezentowane na wykładach z mechaniki lotu. Do wyznaczania osiągów samolotu należy użyć metod mechaniki lotu (Przewodnik po projektach z Mechaniki Lotu oraz opis projektu Charakterystyki aerodynamiczne i osiągi samolotu).

1. Maksymalna doskonałość

Biegunowa analityczna samolotu ma postać:

$$C_x = C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \cdot A \cdot e} \qquad (1)$$

Gdzie:
A – wydłużenie płata
$0{,}01 \le C_{x0} \le 0{,}06$
$e \approx 0{,}8$

Doskonałość aerodynamiczna samolotu to stosunek siły nośnej do oporu, można ją więc zapisać jako:

$$\frac{C_z}{C_x} = C_z \cdot \frac{1}{C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \cdot A \cdot e}} \qquad (2)$$

Aby obliczyć dla jakiego Cz doskonałość jest maksymalna należy równanie (2) zróżniczkować:

$$\frac{d\frac{C_z}{C_x}}{dC_z} = \frac{1}{C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \cdot A \cdot e}} + C_z \frac{2 \cdot C_z}{\pi \cdot A \cdot e} \frac{-1}{\left(C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \cdot A \cdot e}\right)^2} \qquad (3)$$

i pochodną przyrównać do zera:

$$0 = \frac{1}{C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \cdot A \cdot e}} + C_z \frac{2 \cdot C_z}{\pi \cdot A \cdot e} \frac{-1}{\left(C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \cdot A \cdot e}\right)^2} \qquad (4)$$

Pomnóżmy teraz obie strony równania (4) przez $\left(C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \cdot A \cdot e}\right)^2$

$$0 = C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \cdot A \cdot e} - C_z \frac{2 \cdot C_z}{\pi \cdot A \cdot e} = C_{x0} - \frac{C_z^2}{\pi \cdot A \cdot e} \tag{5}$$

Z równania (5) możemy obliczyć C_z maksymalnej doskonałości:

$$C_z = \sqrt{\pi \cdot A \cdot e \cdot C_{x0}} \tag{6}$$

i odpowiadającą jej prędkość

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S} \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot A \cdot e \cdot C_{x0}}}} \tag{7}$$

Maksymalna doskonałość będzie więc miała wartość:

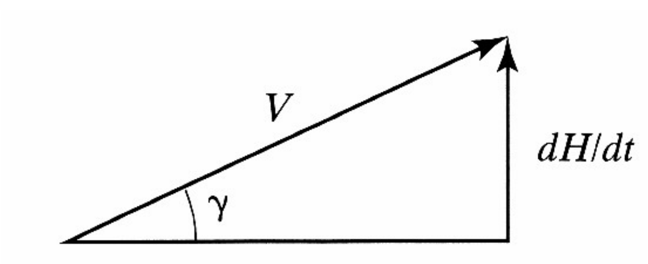
$$\left(\frac{C_z}{C_x}\right)_{max} = \frac{\sqrt{\pi \cdot A \cdot e \cdot C_{x0}}}{C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \cdot A \cdot e}} = \frac{\sqrt{\pi \cdot A \cdot e \cdot C_{x0}}}{C_{x0} + \frac{\pi \cdot A \cdot e \cdot C_{x0}}{\pi \cdot A \cdot e}} = \frac{\sqrt{\pi \cdot A \cdot e \cdot C_{x0}}}{2 \cdot C_{x0}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi \cdot A \cdot e}{C_{x0}}} \tag{8}$$

Znając maksymalną doskonałość samolotu można na tej podstawie obliczyć C_{X0}.

2. Wznoszenie

Prędkość wznoszenia określona jest wzorem:

$$\frac{dH}{dt} = V \sin\gamma = \frac{P_s}{1 + \frac{V}{g}\frac{dV}{dH}} \tag{9}$$



Gdzie: Ps – nadmiar mocy

$$P_s = V \frac{(T - D)}{W} \tag{10}$$

Dla dV/dH=0

$$\sin\gamma = \frac{T - D}{W} = G \tag{11}$$

Gdzie: G – gradient wznoszenia
W = mg - ciężar

$$\frac{D}{W} = \frac{T}{W} - G \tag{12}$$

D jest równe iloczynowi współczynnika oporu określonego biegunową analityczną (1), powierzchni i ciśnienia dynamicznego. Iloraz D/W można więc przedstawić jako:

$$\begin{aligned}\frac{D}{W} &= \frac{q \cdot S}{W}\left(C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \cdot A \cdot e}\right) = \frac{q \cdot S}{W}\left(C_{x0} + \frac{1}{\pi \cdot A \cdot e}\frac{W^2}{S^2 q^2}\right) = \\ &= \frac{1}{W}\left(qSC_{x0} + \frac{W^2}{S^2}\frac{1}{\pi Aeq}\right) = \frac{qC_{x0}}{W/S} + \frac{W}{S}\frac{1}{q\pi Ae}\end{aligned} \tag{13}$$

Wstawiając wynik przekształceń (13) do równania (12) otrzymamy:

$$\frac{qC_{x0}}{W/S} + \frac{W}{S}\frac{1}{q\pi Ae} = \frac{T}{W} - G \tag{14}$$

Pomnóżmy teraz obie strony przez W/S

$$qC_{x0} + \left(\frac{W}{S}\right)^2 \frac{1}{q\pi Ae} - \left(\frac{T}{W} - G\right)\frac{W}{S} = 0 \tag{15}$$

Jak widać jest to równanie kwadratowe ze względu na W/S, którego Δ równa jest:

$$\Delta = \left(\frac{T}{W} - G\right)^2 - 4\frac{C_{x0}}{\pi Ae} \tag{16}$$

A rozwiązania mają postać:

$$\frac{W}{S} = \frac{\left(\frac{T}{W} - G\right) \pm \sqrt{\left(\frac{T}{W} - G\right)^2 - 4\frac{C_{x0}}{\pi Ae}}}{\frac{2}{q\pi Ae}} \tag{17}$$

Aby rozwiązania te miały wartości rzeczywiste, wyrażenie pod pierwiastkiem musi być dodatnie. Stąd też otrzymujemy warunek na T/W:

$$\frac{T}{W} \geq G + 2\sqrt{\frac{C_{x0}}{\pi Ae}} \tag{18}$$

4. Zasięg –samoloty śmigłowe

Z równania Breguet'a wiemy że zasięg samolotu śmigłowego równy jest:

$$\mathbf{R = \frac{\eta}{C \cdot g} \cdot \frac{C_z}{C_x} \cdot \ln(W_n / W_{n+1})} \tag{19}$$

Maksymalny zasięg uzyskamy dla C_z maksymalnej doskonałości:

$$\mathbf{C_z = \sqrt{\pi \cdot A \cdot e \cdot C_{x0}}} \tag{20}$$

Pamiętając, że

$$\mathbf{W = qSC_z} \tag{21}$$

Otrzymamy:

$$\mathbf{\frac{W}{S} = q\sqrt{\pi \cdot A \cdot e \cdot C_{x0}}} \tag{22}$$

5. Zasięg –samoloty odrzutowe

Z równania Breguet'a wiemy że zasięg samolotu odrzutowego równy jest:

$$\mathbf{R = \frac{V}{C \cdot g} \cdot \frac{C_z}{C_x} \cdot \ln(W_n / W_{n+1})} \tag{23}$$

Maksymalny zasięg uzyskamy gdy VC_L/C_D osiągnie wartość maksymalną, przy czym V możemy zastąpić przez $\mathbf{V = \sqrt{\frac{2W}{\rho SC_z}}}$ i otrzymamy:

$$\mathbf{\frac{VC_z}{C_x} = \frac{C_z}{C_x}\sqrt{\frac{2W}{\rho SC_z}} = \frac{\sqrt{C_z}}{C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi Ae}}\sqrt{\frac{2W}{\rho S}}} \tag{24}$$

Wyrażenie to możemy teraz zróżniczkować po C_L i przyrównać do zera:

$$\mathbf{\frac{\partial \frac{VC_z}{C_x}}{\partial C_z} = 0 = \frac{2W}{\rho S}\left(\frac{1}{2\sqrt{C_z}}\frac{1}{C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi Ae}} + \sqrt{C_z}\frac{2C_z}{\pi Ae}\frac{-1}{\left(C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi Ae}\right)^2}\right)} \tag{25}$$

A następnie uprościć

$$0 = \frac{2W}{\rho S}\frac{1}{C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi Ae}}\left(\frac{1}{2\sqrt{C_z}} + \sqrt{C_z}\frac{2C_z}{\pi Ae}\frac{-1}{\left(C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi Ae}\right)}\right) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{C_z}} + \sqrt{C_z}\frac{2C_z}{\pi Ae}\frac{-1}{\left(C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi Ae}\right)} \tag{26}$$

Pomnóżmy teraz obie strony przez $\dfrac{\sqrt{C_z}}{C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi Ae}}$

$$0 = \frac{1}{2}\left(C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi Ae}\right) - \frac{2C_z^2}{\pi Ae} = \frac{C_{x0}}{2} - \frac{3}{2}\frac{C_z^2}{\pi Ae} \tag{27}$$

I przekształćmy w celu obliczenia C_z

$$\frac{C_{x0}}{2} = \frac{3}{2}\frac{C_z^2}{\pi Ae}$$

$$C_z = \sqrt{\frac{C_{x0}\pi Ae}{3}} \tag{28}$$

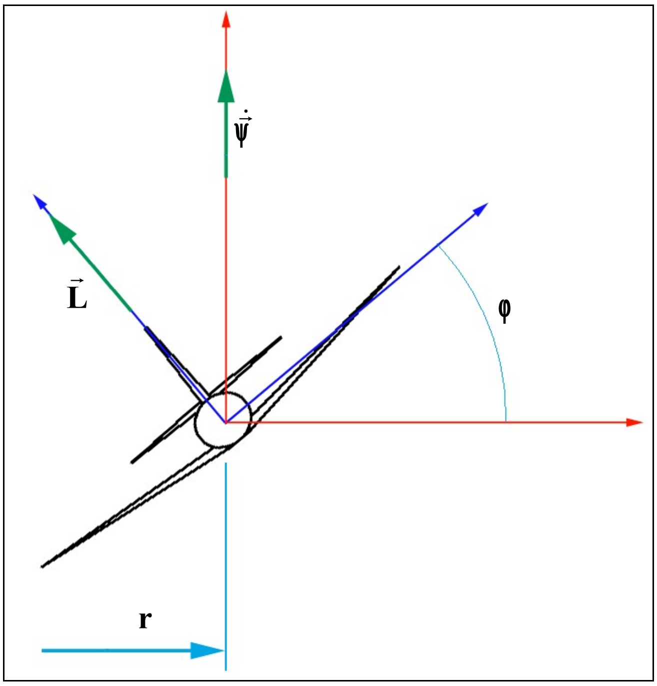
Pamiętając, że

$$\frac{W}{S} = qC_z$$

Otrzymamy, że największy zasięg samolotu odrzutowego uzyskamy gdy:

$$\frac{W}{S} = q\sqrt{\frac{C_{z0}\pi Ae}{3}} \tag{29}$$

6. Zakręt dowolny



Z warunków równowagi w zakręcie wynika, że:

$$\begin{cases} W = L\cos\varphi \\ \dfrac{mV^2}{r} = L\sin\varphi \end{cases} \tag{30}$$

Przechylenie samolotu wiąże się ze wzrostem współczynnika obciążenia:

$$\cos\varphi = \frac{W}{L} = \frac{1}{n} \tag{31}$$

Pamiętając, że:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \tag{32}$$

Możemy zapisać:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \sin^2\varphi = 1$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \tag{33}$$

Wstawiając (33) do drugiego równania z układu (30) otrzymamy promień zakrętu:

$$r = \frac{mV^2}{L\sin\varphi} = \frac{W}{L}\frac{V^2}{g\sin\varphi} = \frac{V^2}{ng\sin\varphi} = \frac{V^2}{g\sqrt{n^2 - 1}} \tag{34}$$

Prędkość kątowa wynika ze związku pomiędzy prędkością kątową i liniową w ruchu po łuku

$$V = \dot{\psi}\, r \tag{35}$$

Wstawiamy (34) do (35), upraszczamy i otrzymujemy

$$\dot{\psi} = \frac{V}{r} = \frac{Vg\sqrt{n^2 - 1}}{V} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{V} \tag{36}$$

A przekształcając na **n**:

$$\mathbf{n} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{V}\dot{\psi}}{\mathbf{g}}\right)^2 + 1} \tag{37}$$

Pamiętamy, że współczynnik obciążenia jest zdefiniowany jako:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{qC}_{\mathbf{z\,max}}}{\mathbf{W/S}} \tag{38}$$

Wstawiając więc (37) do (38) otrzymamy obciążenie powierzchni pozwalające na wykonywanie zakrętów przy założonej prędkości kątowej:

$$\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{qC}_{\mathbf{z\,max}}}{\sqrt{\left(\frac{\dot{\psi}\mathbf{V}}{\mathbf{g}}\right)^2 + 1}} \tag{39}$$

7. Zakręt prawidłowy

Zakręt prawidłowy, to taki w którym pułap lotu samolotu nie ulega zmianie. Układ (30) gwarantował brak przyspieszeń w kierunku pionowym. Nie pozwalał jednak wnioskować o ustalonej prędkości opadania/wznoszenia. Będzie ona równa zeru, jeśli w zakręcie spełniony będzie warunek:

$$\mathbf{T} = \mathbf{D} \tag{40}$$

Wstawiając biegunową równowagi (1) otrzymamy:

$$\mathbf{T} = \mathbf{qS}(\mathbf{C}_{\mathbf{x0}} + \frac{\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^2}{\pi\mathbf{Ae}}) \tag{41}$$

Z kolei podzieliwszy równanie (41) przez W mamy:

$$\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{qS}}{\mathbf{W}}\left(\mathbf{C}_{\mathbf{x0}} + \frac{\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^2}{\pi\mathbf{Ae}}\right) \tag{42}$$

pamiętając że

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{qS}}{\mathbf{W}} \tag{43}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{nW}}{\mathbf{qS}} \tag{44}$$

Możemy wyeliminować C_z z równania (42):

$$\frac{T}{W} = \frac{qC_{x0}}{W/S} + \frac{W}{S}\frac{n^2}{q\pi Ae} \tag{45}$$

Pomnóżmy je teraz przez W/S

$$\left(\frac{W}{S}\right)^2 \frac{n^2}{q\pi Ae} - \frac{T}{W}\frac{w}{s} + qC_{x0} = 0 \tag{46}$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe ze względu na W/S, dla którego

$$\Delta = \left(\frac{T}{W}\right)^2 - \frac{4n^2 qC_{x0}}{q\pi Ae} \tag{47}$$

A rozwiązania mają postać:

$$\frac{W}{S} = \frac{\frac{T}{W} \pm \sqrt{\left(\frac{T}{W}\right)^2 - \frac{4n^2 C_{x0}}{\pi Ae}}}{\frac{2n^2}{q\pi Ae}} \tag{48}$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem musi być dodatnie skąd otrzymujemy warunek na T/W

$$\frac{T}{W} \geq 2n\sqrt{\frac{C_{x0}}{\pi Ae}} \tag{49}$$

Z równania (45) możemy też wyliczyć maksymalny współczynnik obciążenia w zakręcie prawidłowym

$$n_{max} = \sqrt{\frac{q\pi Ae}{W/S}\left(\left(\frac{T}{W}\right)_{max} - \frac{qC_{x0}}{W/S}\right)} \tag{50}$$

A ponieważ:

$$\dot{\psi} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{V} \tag{51}$$

Więc maksymalna prędkość kątowa w zakręcie prawidłowym wyniesie:

$$\dot{\psi}_{max} = \frac{g\sqrt{\frac{q\pi Ae}{W/S}\left(\left(\frac{T}{W}\right)_{max} - \frac{qC_{x0}}{W/S}\right) - 1}}{V} \tag{52}$$

8. Prędkość maksymalna

W warunkach równowagi przy prędkości maksymalnej (większej lub równej zakładanej) w locie poziomym spełnione są równania:

$$P_x = \frac{\rho V^2}{2} S C_x \tag{53}$$

$$P_z = \frac{\rho V^2}{2} S C_z \tag{54}$$

$$P_x \leq T \tag{55}$$

$$P_z = mg \tag{56}$$

Zakładając wyposażenie samolotu w śmigło o zmiennym skoku można przyjąć że sprawność śmigła jest bliska maksymalnej i nie mniejsza niż 80%. Ponadto można przyjąć biegunową analityczną w postaci (1)

Wstawiając (53) i (1) do (55) otrzymujemy:

$$\frac{\rho V^2}{2} S \left(C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \Lambda e} \right) \leq T \tag{57}$$

Z kolei wstawiając (56) do (54) otrzymujemy:

$$C_z = \frac{2mg}{\rho V^2 S} \tag{58}$$

Można teraz wstawić (58) do (57)

$$\frac{\rho V^2}{2} S \left(C_{x0} + \frac{4m^2 g^2}{\pi \Lambda e \rho^2 S^2 V^4} \right) \leq T \tag{59}$$

Dzieląc obie strony przez mg mamy:

$$\frac{\rho V^2}{2mg} S \left(C_{x0} + \frac{4m^2 g^2}{\pi \Lambda e \rho^2 S^2 V^4} \right) \leq \frac{T}{mg} \tag{60}$$

Wiedząc, że mg = W dostaniemy ostatecznie:

$$\frac{\rho V^2}{2} \frac{S}{W} \left(C_{x0} + \frac{4}{\pi \Lambda e \rho^2 V^4} \frac{W^2}{S^2} \right) \leq \frac{T}{W} \tag{61}$$