Metody Numeryczne w Budowie Samolotów/Śmigłowców

Wykład I

dr inż. Tomasz Goetzendorf-Grabowski
(tgrab@meil.pw.edu.pl)

Dęblin, 11 maja 2009

Organizacja wykładu

- 5 dni x 6 h = 30 h
- propozycja zmiany:
  - 6 h + 3 x 7 h + 3 h = 30 h
    - 11.05 – 6h
    - 18.05, 25.05, 1.06 – 7h (8:15 – 15)
    - 8.06 – 3h (8:15 – 11)

- Wykład + ćwiczenia (baza, znajomość pakietów)
- zaliczenie – projekt (aerodynamika lub stateczność)

Zawartość wykładu (1/4)

- Wstęp
  - pojęcie metod numerycznych
  - definicje błędów
- Obliczanie wartości funkcji – błędy – algorytm Hornera
- Aproksymacja vs. Interpolacja
  - teoria
  - praktyczne wykorzystanie
  - pakiety

Zawartość wykładu (2/4)

- Interpolacja wielomianami
- Metody przybliżone znajdowania zer funkcji nieliniowej
  - zbieżność
  - Metoda Newtona

Zawartość wykładu (3/4)

- Metody całkowania
- Rozwiązywanie równań różniczkowych
- Wartości i wektory własne macierzy
- Układy równań liniowych
  - dekompozycja macierzy

Zawartość wykładu (4/4)

- zastosowanie w aerodynamice
  - metody potencjalne (pakiet PANUKL)
  - model Eulera
- zastosowanie w badaniach własności lotnych
  - modele liniowe – stateczność
  - modele nieliniowe – symulacja
  - metody numeryczne vs. siła obliczeniowa komputerów
- programy międzynarodowe - SimSAC

Literatura

- Stoer J., Bulirsch R., *Introduction to Numerical Analysis,* Springer-Verlag, New York 1983 (wyd. polskie: Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa 1987)
- Björck Å., Dahlquist G., *Numerical Methods*, Practice□Hall, 1974 (wyd. polskie: Metody numeryczne, PWN, Warszawa 1983)
- Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., *Metody Numeryczne*, WNT, Warszawa 1982
- Krupowicz A., *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych,* PWN, Warszawa 1986
- Ralston A., *A First Course in Numerical Analysis,* McGraw-Hill, Inc, London 1965 (wyd. polskie: Wstęp do analizy numerycznej, wyd.III, PWN 1983)
- Press W.H., Vetterling W.T., Teukolsky S.A., Flannery B.P., *Numerical Recipes in FORTRAN - The Art of Scientifing Computing, 2nd Edition*, Cambridge University Press, 1992
- Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B., *Computer Methods for Mathematical Computation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1977

Pojęcia wstępne

- Metody numeryczne (metody obliczeniowe, przybliżone, „Numerical Methods”)
  - skończone
    - dokładne w sformułowaniu teoretycznym (schemat Hornera, metoda eliminacji Gausa, itp..)
    - przybliżone
  - nieskończone
    - metody kolejnych przybliżeń, metody iteracyjne

Pojęcia wstępne – błędy

- Błędy danych
- Błędy reprezentacji liczb
- Błędy zaokrągleń
- Błędy metody
- Przenoszenie się błędów zaokrągleń
- Stabilność algorytmów

Stabilność - przykład

Przykłady usuwania niestabilności prostych algorytmów, z zadaniami

Przykład 1.10. Dane: liczba dodatnia a oraz liczba $\Delta a \leq a$. Rozpatrzmy dwa równoważne formalnie algorytmy obliczenia wartości

$$
\begin{aligned}
y_1 = g_1(a, \Delta a) &= \sqrt{a + \Delta a} - \sqrt{a} = \\
&= (\sqrt{a - \Delta a} - \sqrt{a})\,\frac{\sqrt{a + \Delta a} + \sqrt{a}}{\sqrt{a + \Delta a} + \sqrt{a}} = \\
&= \frac{\Delta a}{\sqrt{a + \Delta a} + \sqrt{a}} = g_2(a, \Delta a) = y_2.
\end{aligned}
$$

Porównajmy wyniki obliczeń według obu algorytmów dla dokładnych danych wejściowych: $a = 3$, $\Delta a = 0.01$.

Stabilność - przykład

Przybliżone wartości pierwiastków		$y_1 = \sqrt{3.01} - \sqrt{3}$	$y_2 = \frac{0.01}{\sqrt{3.01} + \sqrt{3}}$
$\sqrt{3.01}$	$\sqrt{3}$		
1.7	1.7	0.0	0.002941
1.73	1.73	0.00	0.002980
1.735	1.732	0.003	0.002884
1.7349	1.7321	0.0028	0.002884
1.73493	1.73205	0.00288	0.002884
1.734935	1.732051	0.002884	0.002884

Obliczanie wartości funkcji

- Jeżeli bezpośrednie obliczenie wartości funkcji jest niemożliwe lub zbyt pracochłonne, powstaje zagadnienie aproksymacji, czyli najlepszego w sensie nałożonych wymagań przybliżenia funkcji
- Funkcję f(x) można rozwinąć w zbieżny szereg funkcyjny

$$f(x) \approx \sum_{i=k}^{\infty} a_i u_i(x) \quad dla \quad x \in \langle a, b \rangle$$

Schemat Hornera do obliczania wartości wielomianu

Algorytm Hornera

Obliczenie wartości wielomianu o danych współczynnikach $a_o, a_1, \ldots, a_n$, w danym punkcie x, bezpośrednio według wzoru

$$W_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (2.2)$$

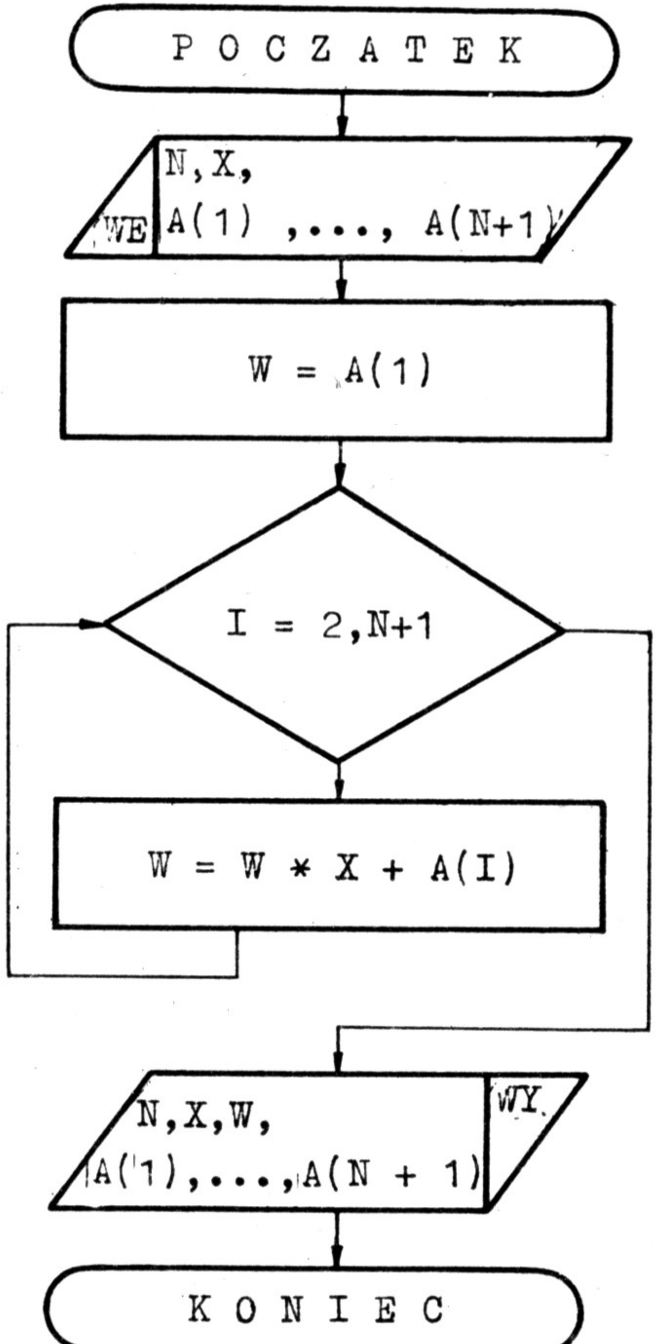
wymaga wykonania $2n-1$ mnożeń i n dodawań.

Wzór określający $W_n(x)$ można przekształcić do postaci zwanej schematem Hornera obliczania wartości wielomianu przez kolejne przemnożenia

$$W_n(x) = (\ldots((a_o x + a_1)x + a_2)x + \ldots + a_{n-1})x + a_n.$$

Działania wykonuje się w następującej kolejności

$$\begin{aligned} w_o &= a_o, \\ w_i &= w_{i-1}x + a_i \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (2.3) \\ W_n(x) &= w_n. \end{aligned}$$



Schemat Hornera do obliczania wartości wielomianu

Aproksymacja wielomianem (1/12)

Aproksymacja wielomianem jest jedną z najbardziej efektywnych technik znajdowania minimum lub zerowania się funkcji jednej zmiennej.

UWAGA !

Aproksymacja funkcji o dużej nieliniowości może powodować powstawanie dużych rozbieżności pomiędzy rzeczywistym przebiegiem, a funkcją aproksymującą

Aproksymacja wielomianem (2/12)

Generalne zasady:

- Oszacowanie położenia punktu w którym badana funkcja osiąga minimum;
- Aproksymacja funkcji wielomianem w tym punkcie;
- Porównanie rozwiązania ścisłego i rozwiązania za pomocą wielomianu aproksymującego;
- Jeżeli różnica pomiędzy rozwiązaniami jest w granicach zakładanego błędu to można powiedzieć że aproksymacja została dokonana poprawnie;

Aproksymacja wielomianem (3/12)

Przykład: Znaleźć minimum funkcji opisanej wzorem

$$F = 1 - 3X + e^{2X} \quad ;$$

Znajdujemy pierwszą pochodna danej funkcji

$$F' = -3 + 2e^{2X} \quad ;$$

Zakładamy aproksymacje funkcji za pomocą wielomianu drugiego rzędu

$$\tilde{F} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \quad ;$$

Znajdujemy pierwszą pochodna wielomianu aproksymującego

$$\tilde{F}' = \frac{dF}{dX} = a_1 + 2a_2 X \quad ;$$

Aproksymacja wielomianem (4/12)

Zakładamy punkty na podstawie których powstanie wielomian: np. X=0 i X=0,5

Powstaje układ równań z którego wyznaczamy współczynniki wielomianu

$$a_0 = 2.0$$

$$a_0 + 0.5a_1 + 0.25a_2 = 2.2183$$

$$a_1 = -1.0$$

Wartość pochodnej w punkcie X=0 wyznaczona z równania oryginalnego

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

$$a_0 = 2.0 \qquad a_1 = -1.0 \qquad a_2 = 2.873$$

Aproksymacja wielomianem (7/12)

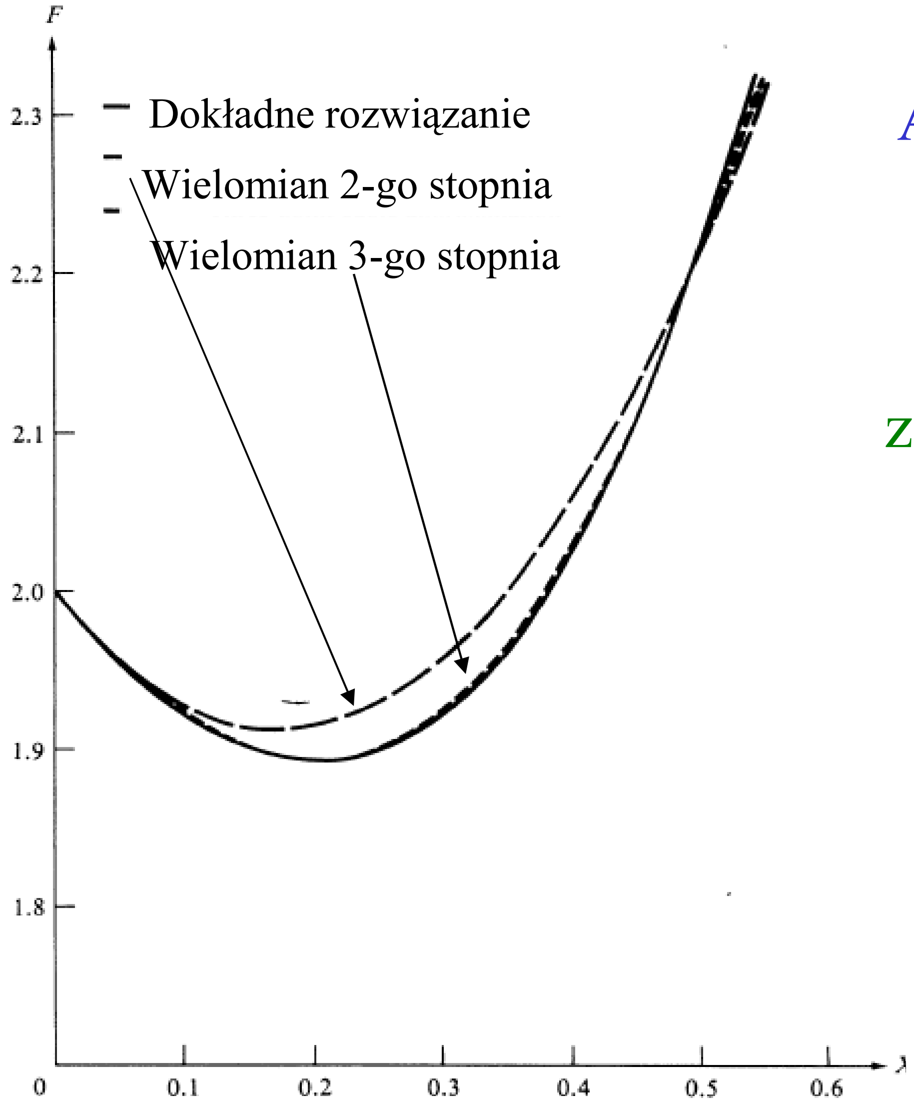
W rezultacie otrzymujemy wielomian aproksymujący

$$\tilde{F} = 2.0 - 1.0X + 2.873X^2 \quad ;$$

Przy założeniu aproksymacji wielomianem trzeciego stopnia otrzymujemy równanie

$$\tilde{F} = 2.0 - 1.0X + 1.923X^2 + 1.900X^3 \quad ;$$

Aproksymacja wielomianem (8/12)



Aproksymacje funkcji F(X) za pomocą wielomianów

Porównanie dwóch zastosowanych wielomianów o różnym stopniu

Aproksymacja wielomianem (9/12)

Porównanie aproksymacji przy zastosowaniu różnego stopnia wielomianu

$F = 1 - 3X + e^{2X}$ $\qquad$ $\tilde{F} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$

Method	X	F	F'	$\tilde{F}$
Initial points	0.0	2.0	−1.0	—
	0.5	2.2183	—	—
2-Point quadratic	0.17403	1.8942	—	1.9130
3-Point cubic	0.20045	1.8918	—	1.8921
4-Point cubic	0.20242	1.8918	—	1.8918
Precise solution	0.20273	1.8918	0.0	—

Współrzędne punktu minimum

Wartości funkcji aproksymującej w minimum

Aproksymacja wielomianem (10/12)

Dane niezbędne do przeprowadzenia aproksymacji

Approximation	Required information				
	F_1	F'_1	F_2	F_3	F_4
1-Point linear	X	X	—	—	—
2-Point linear	X	—	X	—	—
2-Point quadratic	X	X	X	—	—
3-Point quadratic	X	—	X	X	—
3-Point cubic	X	X	X	X	—
4-Point cubic	X	—	X	X	X

Zadajemy wartosci w punktach 1,2,3,4 oraz pochodna w punkcie 1 (wszystko w zaleznosci od typu aproksymacji)

$$F = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

Aproksymacja wielomianem (11/12)

UWAGI DO APROKSYMACJI WIELOMIANOWEJ:

- Interpolacja pomiędzy dwoma punktami jest lepszym rozwiązaniem niż ekstrapolacja;

- Korzystne jest rozpocząć aproksymację stosując wielomian niższego stopnia (mniejsza liczba niezbędnych danych), a następnie zastosować wielomian wyższego rzędu uzyskując poprawę wyniku; (bazowanie na poprzednich rozwiązaniach)

- Użycie pochodnych wyższego rzędu nie gwarantuje zwiększenia dokładności obliczeń;

Aproksymacja wielomianem (12/12)

WNIOSKI:

Aproksymacja wielomianem takiego stopnia jaki jest możliwy stosując minimum dostępnych danych. Następnie stopniowe zwiększanie stopnia wielomianu (bazując na wynikach uzyskanych za pomocą wielomianu niższego stopnia) w celu poprawy rozwiązania.

Współczynniki Wielomianu (1/7)

Definicja współczynników wielomianu w zależności od stopnia wielomianu i liczby punktów użytych do aproksymacji

Wzór ogólny wielomianu:

$$F(\mathbf{X}) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

<u>Aproksymacja liniowa jedno-punktowa:</u>

Dane: $\left(X_1 \;, F_1 \;, F_1^{'}\right)$

$$a_3 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = F_1^{'}$$

$$a_0 = F_1 - F_1^{'} X_1$$

Współczynniki Wielomianu (2/7)

Aproksymacja liniowa dwu-punktowa:

Dane: $\left(X_1\ ,F_1\right)\ ,\left(X_2\ ,F_2\right)$

$$a_3 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = \frac{F_2 - F_1}{X_2 - X_1}$$

$$a_0 = F_1 - a_1 X_1$$

Współczynniki Wielomianu (3/7)

Aproksymacja dwu-punktowa równaniem kwadratowym :

Dane: $\left(X_1\ ,F_1\ ,F_1^{'}\right)\ ,\left(X_2\ ,F_2\right)$

$$a_3 = 0$$

$$a_2 = \frac{\left(F_2 - F_1\right)/\left(X_2 - X_1\right) - F_1^{'}}{X_2 - X_1}$$

$$a_1 = F_1^{'} - 2a_2X_1$$

$$a_0 = F_1 - a_1X_1 - a_2X_1^2$$

Współczynniki Wielomianu (4/7)

<u>Aproksymacja trzy-punktowa równaniem kwadratowym</u> :

Dane: $\left(X_1 \ ,F_1\right) \ ,\left(X_2 \ ,F_2\right) \ ,\left(X_3 \ ,F_3\right)$

$$a_3 = 0$$

$$a_2 = \frac{\left(F_3 - F_1\right)/\left(X_3 - X_1\right) - \left(F_2 - F_1\right)/\left(X_2 - X_1\right)}{X_3 - X_2}$$

$$a_1 = \frac{F_2 - F}{X_2 - X_1} - a_2\left(X_1 + X_2\right)$$

$$a_0 = F_1 - a_1 X_1 - a_2 X_1^2$$

Współczynniki Wielomianu (5/7)

Aproksymacja trzy-punktowa równaniem 3-go stopnia :

Dane: $\left(X_1 \;, F_1, F_1^{'}\right) \;, \left(X_2 \;, F_2\right) \;, \left(X_3 \;, F_3\right)$

$$a_3 = \frac{F_3 - F_1}{\left(X_3 - X_2\right)\left(X_3 - X_1\right)^2} - \frac{F_2 - F_1}{\left(X_3 - X_2\right)\left(X_3 - X_1\right)^2} + \frac{F_1^{'}}{\left(X_2 - X_1\right)\left(X_3 - X_1\right)}$$

$$a_2 = \frac{\left(F_2 - F_1\right)/\left(X_3 - X_1\right) - F_1^{'}}{X_2 - X_1} - a_3\left(2X_1 + X_2\right)$$

$$a_1 = F_1^{'} - 2a_1X_1 - 3a_3X_1^2$$

$$a_0 = F_1 - a_1X_1 - a_2X_1^2 - a_3X_1^3$$

Współczynniki Wielomianu (6/7)

Aproksymacja cztero-punktowa równaniem 3-go stopnia :

Dane: $(X_1, F_1), (X_2, F_2), (X_3, F_3), (X_4, F_4)$

For convenience, define the following terms:

$$Q_1 = X_3^3(X_2 - X_1) - X_2^3(X_3 - X_1) + X_1^3(X_3 - X_2) \qquad (2\text{-}13a)$$

$$Q_2 = X_4^3(X_2 - X_1) - X_2^3(X_4 - X_1) + X_1^3(X_4 - X_2) \qquad (2\text{-}13b)$$

$$Q_3 = (X_3 - X_2)(X_2 - X_1)(X_3 - X_1) \qquad (2\text{-}13c)$$

$$Q_4 = (X_4 - X_2)(X_2 - X_1)(X_4 - X_1) \qquad (2\text{-}13d)$$

$$Q_5 = F_3(X_2 - X_1) - F_2(X_3 - X_1) + F_1(X_3 - X_2) \qquad (2\text{-}13e)$$

$$Q_6 = F_4(X_2 - X_1) - F_2(X_4 - X_1) + F_1(X_4 - X_2) \qquad (2\text{-}13f)$$

Współczynniki Wielomianu (7/7)

Aproksymacja cztero-punktowa równaniem 3-go stopnia (cd):

Dane: $(X_1, F_1), (X_2, F_2), (X_3, F_3), (X_4, F_4)$

In terms of $Q_1 - Q_6$, the coefficients now become

$$a_3 = \frac{Q_3 Q_6 - Q_4 Q_5}{Q_2 Q_3 - Q_1 Q_4} \tag{2-14a}$$

$$a_2 = \frac{Q_5 - a_3 Q_1}{Q_3} \tag{2-14b}$$

$$a_1 = \frac{F_2 - F_1}{X_2 - X_1} - a_3 \frac{X_2^3 - X_1^3}{X_2 - X_1} - a_2 (X_1 + X_2) \tag{2-14c}$$

$$a_0 = F_1 - a_1 X_1 - a_2 X_1^2 - a_3 X_1^3 \tag{2-14d}$$

Zera wielomianu (1/8)

Wyznaczenie punktu X w którym funkcja F(X)=0

$$\widetilde{F}(\mathbf{X}) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 = 0$$

Równanie reprezentuje wielomian trzeciego stopnia

Zera wielomianu (2/8)

Aproksymacja liniowa :

$$a_3 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$\widetilde{F}(\mathbf{X}) = a_0 + a_1 X$$

$$X^* = \frac{-a_0}{a_1}$$

Rozwiązaniem jest jeden pierwiastek

Zera wielomianu (3/8)

Aproksymacja równaniem kwadratowym :

$$\widetilde{F}(\mathbf{X}) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \quad a_3 = 0$$

$$b = a_1{}^2 - 4a_0a_2$$

$$X_1{}^* = \frac{-a_1 + \sqrt{b}}{2a_2}$$

$$X_2{}^* = \frac{-a_1 - \sqrt{b}}{2a_2}$$

b > 0 - dwa pierwiastki rzeczywiste

b = 0 - jeden pierwiastek podwójny

Rozwiązania oczekiwane

b < 0 - rozwiązanie w postaci liczb zespolonych

Rozwiązanie pomijane

Zera wielomianu (4/8)

Aproksymacja równaniem 3-go stopnia :

$$\widetilde{F}(\mathbf{X}) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

Aproksymacja dająca wielokrotne pierwiastki

Zera wielomianu (5/8)

Aproksymacja równaniem 1-go stopnia :

Metoda Newton'a wyznaczania zera wielomianów wyższych stopni

Metoda pierwszego rzędu wykorzystująca funkcję oraz jej pochodną

$$F \approx F_0 + F_0'\left(X - X_0\right)$$

Gdzie:

X_O – wartość początkowa;

F_O – wartość funkcji w punkcie X_O;

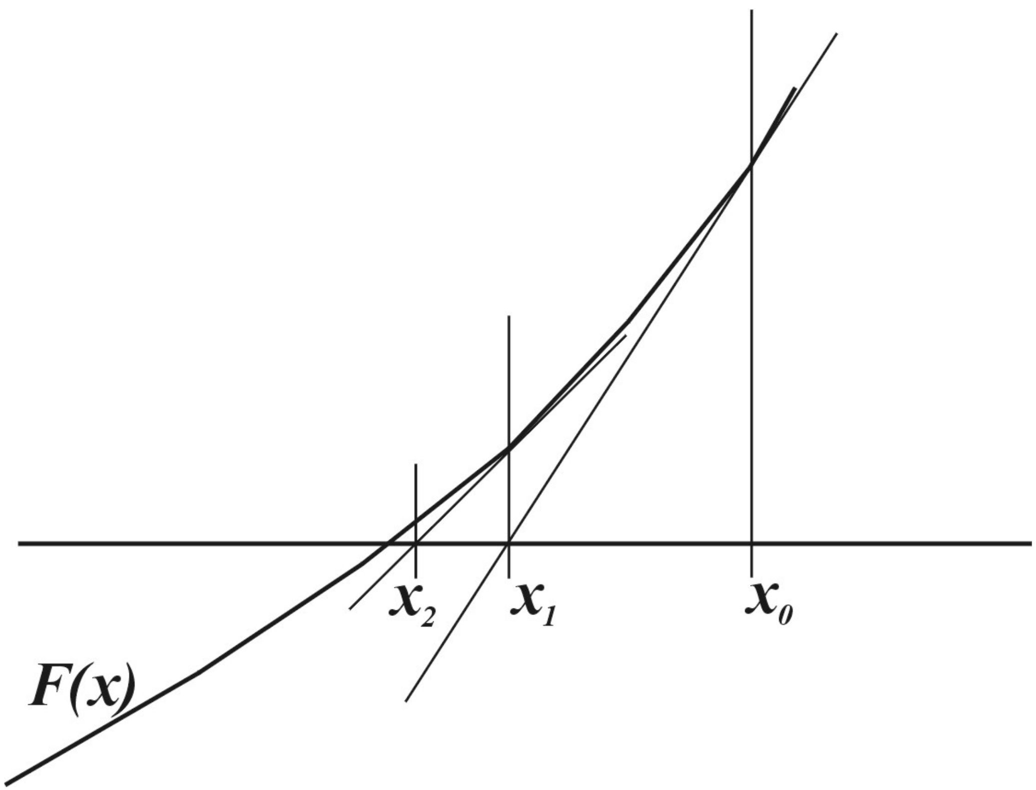
F_0' – wartość pochodna w punkcie X_O;

$$F_0 = a_0 + a_1 X_0 + a_2 X_0^2 + a_3 X_0^3$$

$$F_0' = a_1 + 2a_2 X_0 + 3a_3 X_0^2$$

Metoda Newtona – Raphsona (6/8)

Jest to połączenie metody iteracyjnej z lokalną aproksymacją za pomocą stycznej



$$\frac{df}{dx} = g(x)$$

$$y = g(x_0)x + C(x_0)$$

$$dla\ x = x_0\ \ mamy$$

$$g(x_0)x_0 + C(x_0) = f(x_0)$$

$$C(x_0) = f(x_0) - g(x_0)x_0$$

$$dla\ x = x_1\ \ mamy$$

$$g(x_0)x_1 + C(x_0) = 0$$

$$x_1 = -\frac{C(x_0)}{g(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

Jeżeli x_0 jest dobrym przybliżeniem początkowym, to proces Newtona-Raphsona jest bardzo szybko zbieżny

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{g(x_i)}$$

Zera wielomianu (7/8)

Aproksymacja równaniem 1-go stopnia :

$$F_0 + F_0'(X - X_0) = 0$$

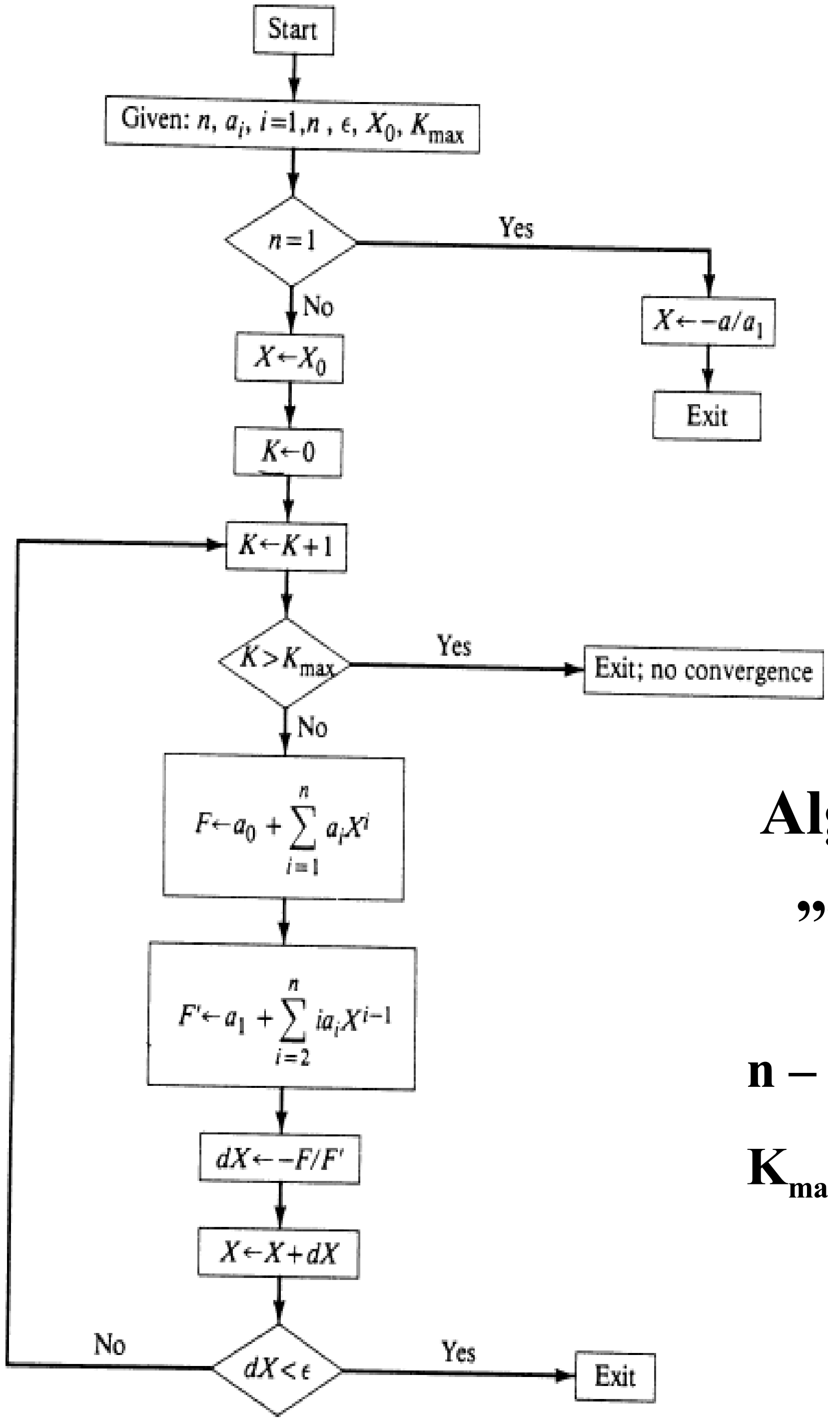
$$X_1 = X_0 - \frac{F_0}{F_0'}$$

$$X_N = X_{N-1} - \frac{F_{N-1}}{F_{N-1}'}$$

Gdzie:

X_1 –pierwsza iteracja rozwiązania;

X_N – N-ta iteracja rozwiązania;



Zera wielomianu (8/8)

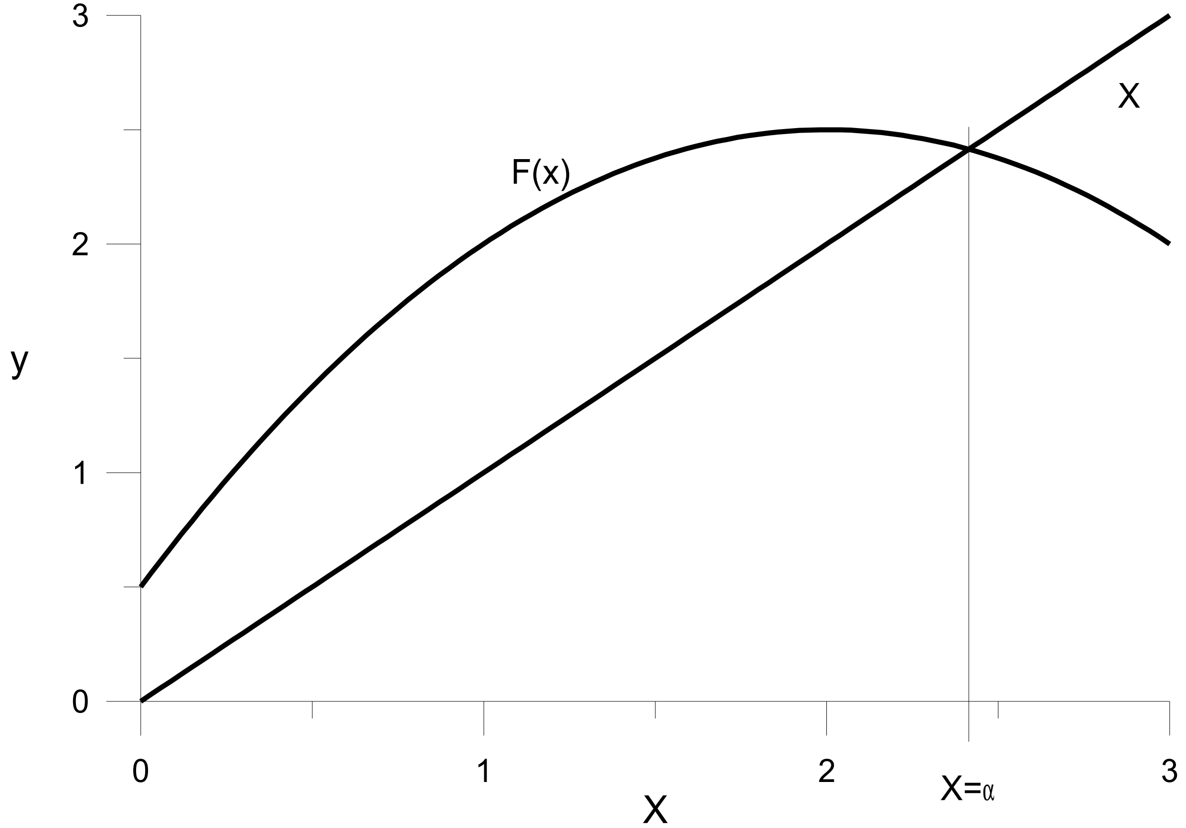
Algorytm wyznaczania pierwszego „zera” wielomianu n-tego rzędu przy użycie metody Newton’a

n – stopień wielomianu

K_{max}= maksymalna liczba iteracji

Zadanie iteracyjne (1/2)

Rozważmy metodę iteracyjną na przykładzie prostego równania nieliniowego x = F(x), które można graficznie zinterpretować jako



Zadanie iteracyjne (2/2)

Zakładamy x_0 i budujemy ciąg:

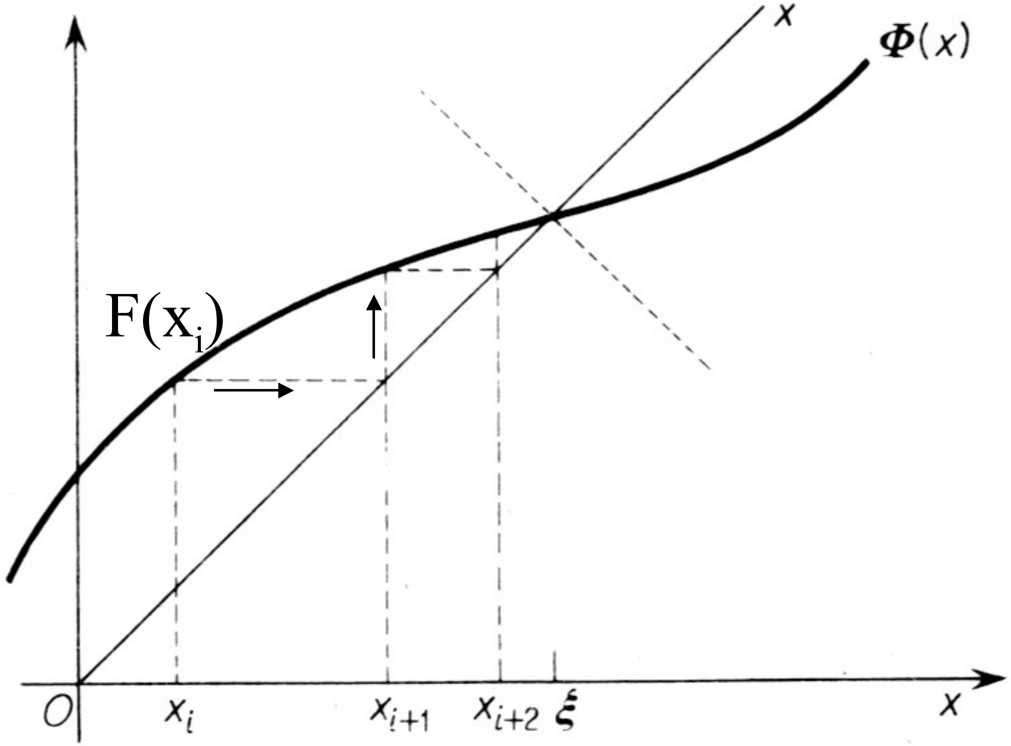
$$x_1 = F(x_0)\ ;\ x_2 = F(x_1)\ ;\ \ldots\ x_{n+1} = F(x_n)$$

$$Ciag\ jest\ zbiezny\ do\ \alpha \quad gdy\ \ \alpha = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(\alpha)$$

Zauważmy, że każde równanie nieliniowe można doprowadzić do postaci **x=F(x).** Niech np. będzie równanie **G(x)=0**. Możemy wtedy podstawić **x = G(x) + x = F(x)**

Algorytmy zbieżne (1/2)

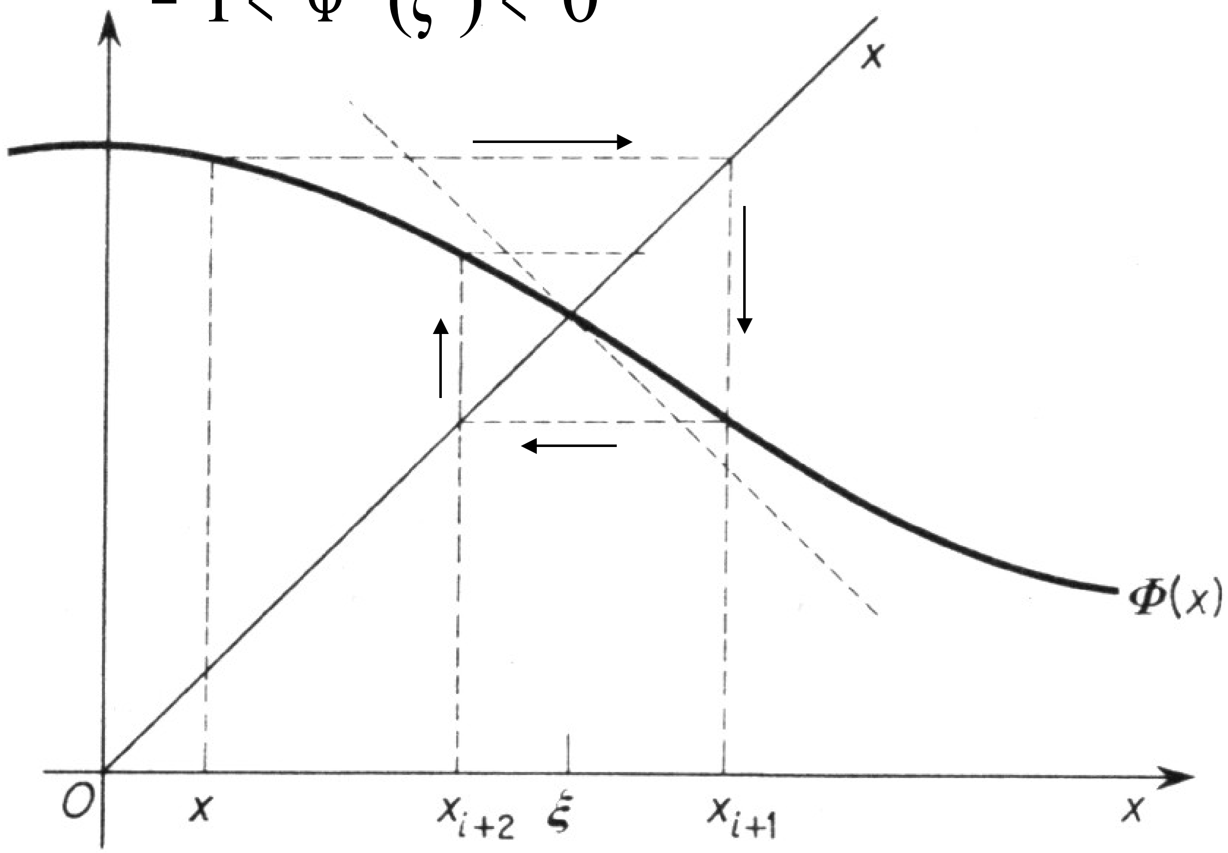
$$0 < \Phi'(\xi) < 1$$



Rys. 5. Zbieżność monotoniczna

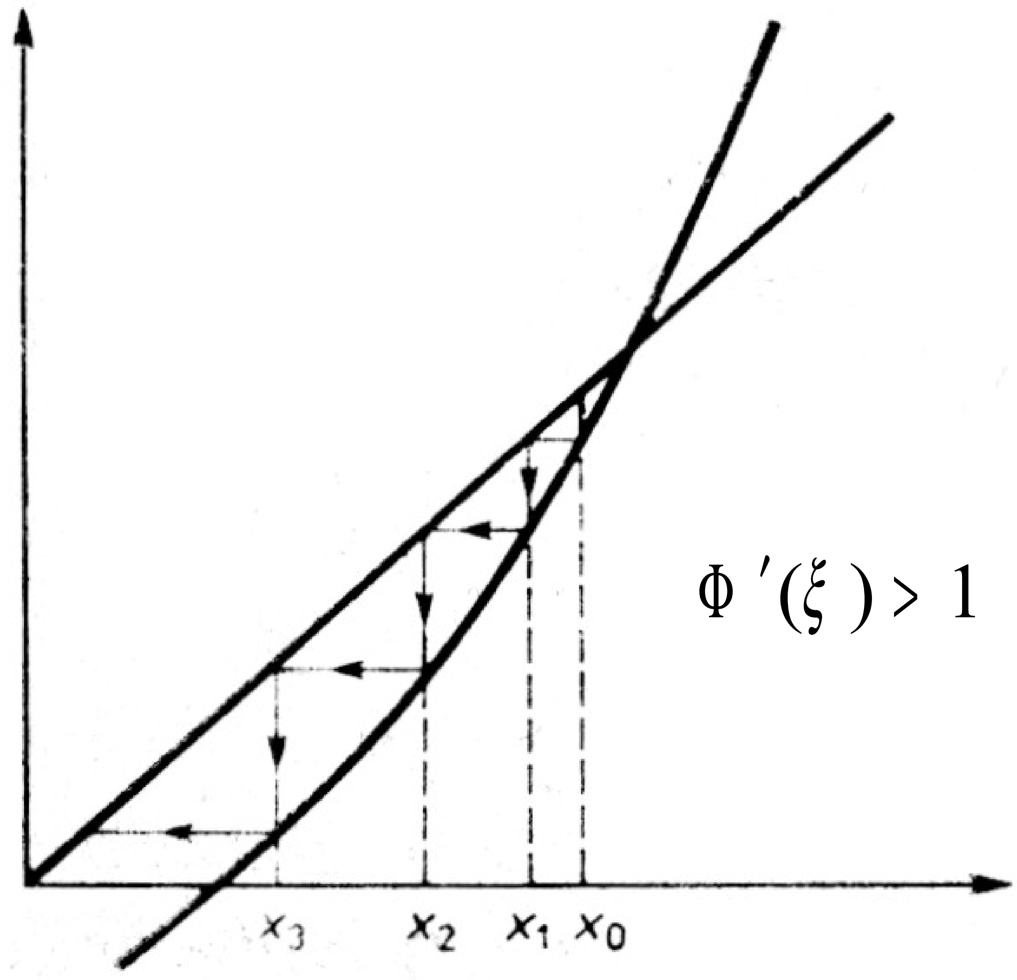
Algorytmy zbieżne (2/2)

$$-1 < \Phi'(\xi) < 0$$



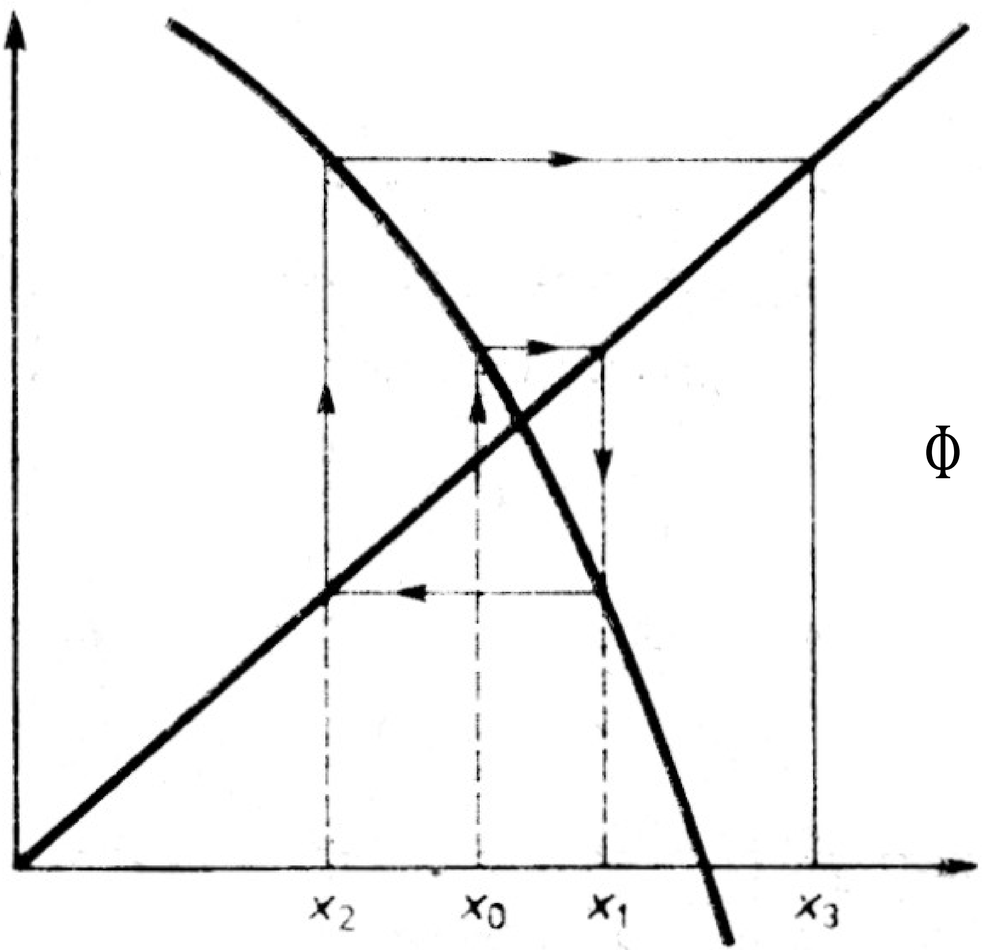
Rys. 6. Zbieżność oscylująca

Algorytmy rozbieżne (1/2)



$$\Phi'(\xi) > 1$$

Algorytmy rozbieżne (2/2)

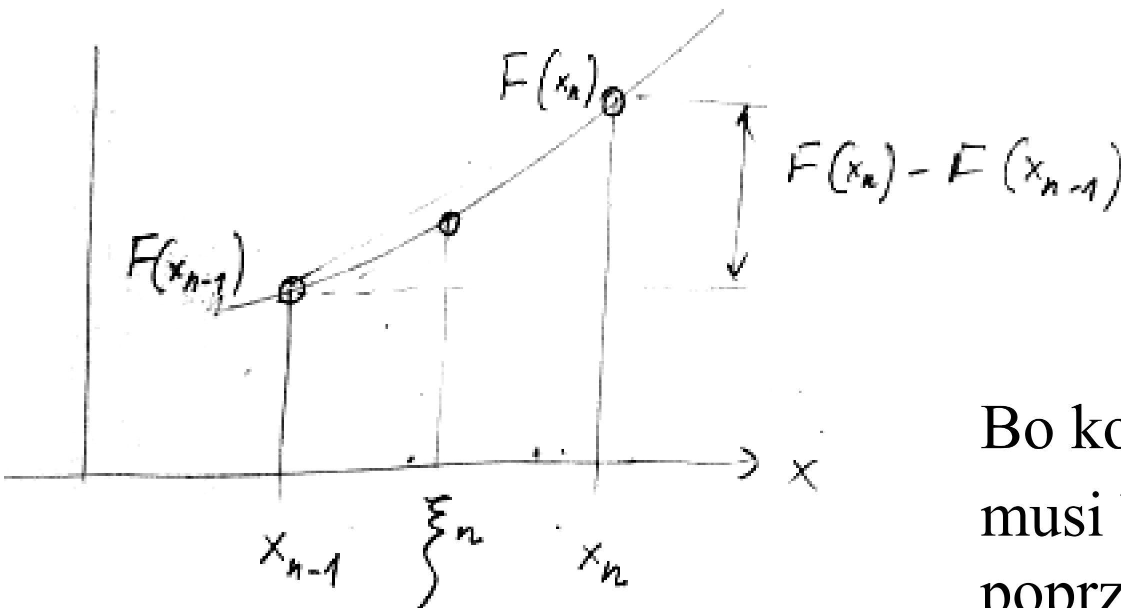


$$\Phi'(\xi) < -1$$

Kryterium zbieżności

$$Niech\ x_{n+1} - x_n = F(x_n) - F(x_{n-1}) = F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

Z twierdzenia o wartości średniej



Bo kolejny przyrost x_n-x_{n-1} musi być mniejszy od poprzedniego

Mamy więc: $$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = F'(\xi_n) < 1$$

Tak więc zbieżność jest zapewniona, gdy $F'(\xi_n) < 1$ w każdym punkcie przedziału otoczenia α, które zawiera $x_n, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

Przykład-obliczenie pierwiastka kwadratowego (1/4)

$$x^2 = c$$

Algorytm nr 1 - rozbieżny

$$x = x^2 + x - c \qquad \rightarrow \qquad F(x) = x^2 + x - c$$

$$Niech \quad c = 2 \ ; \ x_0 = 1.5$$

$$x_1 = F(1.5) = 2.25 + 1.5 - 2 = 1.75$$

$$x_2 = F(1.75) = 1.75^2 + 1.75 - 2 = 2.8125$$

$$x_3 = F(2.8125) = 8.7226563$$

Proces jest rozbieżny, gdyż:

$$\frac{dF}{dx} = 2x + 1 > 1 \quad gdy \quad x > 0$$

Przykład-obliczenie pierwiastka kwadratowego (2/4)

$$x^2 = c$$

Algorytm nr 2 - niezbieżny

$$x = \frac{c}{x}$$

$$Niech\ \ c = 2\ ;\ x_0 = 1.5$$

$$x_1 = \frac{2}{x} = 1.33333$$

$$x_2 = \frac{2}{1.33333} = 1.5$$

$$x_3 = \frac{2}{x} = 1.33333$$

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x = 1.33333\ ;\ c = 2} = -\ 1.1250$$

Tak więc nie w każdym punkcie otoczenia α pochodna dF/dx jest mniejsza od 1

Przykład-obliczenie pierwiastka kwadratowego (3/4)

$$x^2 = c$$

Algorytm nr 3 - zbieżny

$$x^2 = c \rightarrow \quad 2x^2 = x^2 + c \rightarrow \quad x = \frac{x^2 + c}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{2}{2x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x} \right)$$

sqrt 2 = 1.4142136

$$Niech \quad c = 2\ ;\ x_0 = 1.5$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5} \right) = 1.4166667$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1.4166667 + \frac{2}{1.4166667} \right) = 1.4142157$$

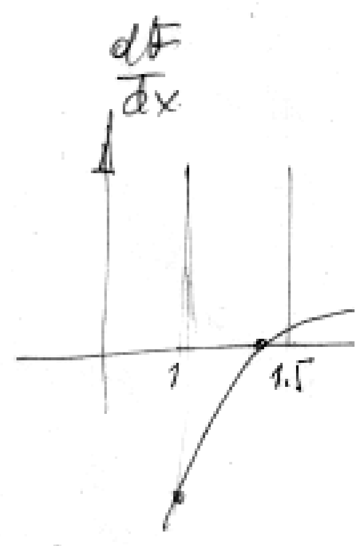
$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c}{x^2} \right)$$

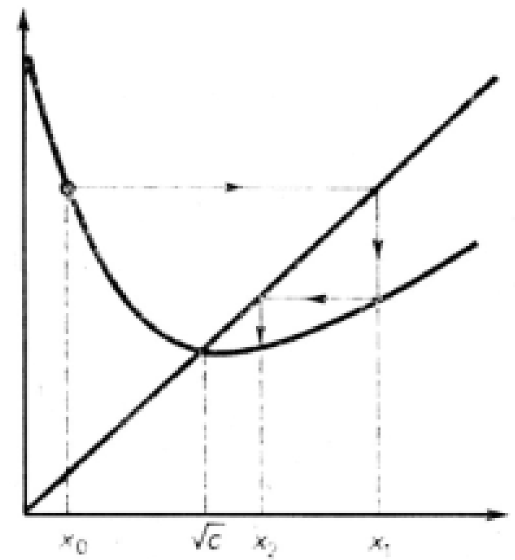
Przykład-obliczenie pierwiastka kwadratowego (4/4)

$$x^2 = c$$

Algorytm nr 3 – zbieżny - cd

x	1	Sqrt(2)	1.5	2
dF/dx	-1/2	0	0.0555	0.25





Czyli jest to przypadek nr I

Powyższy algorytm jest podstawą obliczania pierwiastków kwadratowych
we wszystkich komputerach