

Metody Numeryczne w Budowie Samolotów/Śmigłowców

Wykład II

dr inż. Tomasz Goetzendorf-Grabowski
(tgrab@meil.pw.edu.pl)

Dęblin, 18 maja 2009

Informacje

- Strony internetowe:
 - wykład:
<http://itlims.meil.pw.edu.pl/zsis/pomoce/MN/mnum.htm>
 - oprogramowanie:
 - metoda panelowa:
 - <http://itlims.meil.pw.edu.pl/zsis/pomoce/PANUKL/panukl.htm>
 - analiza stateczności:
 - <http://itlims.meil.pw.edu.pl/zsis/pomoce/SDSA/sdsa.htm>

Zawartość wykładu

- Metody całkowania numerycznego
- Różniczkowanie numeryczne
- Rozwiązywanie równań różniczkowych
 - wstęp

Literatura

- Marianna Ufnalska, *Laboratorium metod numerycznych FORTRAN 1900*, Wyd. PW, Wraszawa 1982
- Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., *Metody Numeryczne*, WNT, Warszawa 1982
- Krupowicz A., *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1986
- Szmelter J., *Metody komputerowe w mechanice*, PWN, Warszawa 1980

Całkowanie numeryczne funkcji

Numeryczne całkowanie funkcji $f(x)$ polega na obliczeniu przybliżonej wartości zbieżnej całki oznaczonej

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx. \quad (4.1)$$

Stosuje się je w przypadkach, gdy $f(x)$ jest dana w postaci dyskretnej, gdy funkcja podcałkowa ma skomplikowaną postać analityczną i trudno jest wykonać przekształcenia (np. według reguły podstawienia lub całkowania przez części) oraz gdy funkcja pierwotna nie jest funkcją elementarną.

Całkę funkcji $f(x)$ w skończonym przedziale $\langle a, b \rangle$ zastępujemy kombinacją liniową wartości funkcji podcałkowej w węzłach x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, należących do przedziału całkowania

$$S(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i), \quad (4.2)$$

gdzie A_i - współczynniki liczbowe.

Wtedy

$$I(f) = S(f) + R_n,$$

gdzie R_n - błąd przybliżenia całki (4.1) sumą (4.2).

Całkowanie numeryczne funkcji

Wzory postaci (4.2) nazywamy kwadraturami. Kwadratura (4.2) ma $2n+2$ parametrów ($n+1$ węzłów i $n+1$ współczynników), które mogą przyjmować dowolne wartości.

Jako kryterium dokładności przyjmujemy zgodność kwadratury z wartością całki dla wielomianów. Mówimy, że kwadratura $S(f)$ jest rzędu p , jeżeli jest całkowiec dokładna dla wielomianów $W(x)$ stopnia niższego niż p , to znaczy, że $I(W) = S(W)$. Natomiast dla wielomianów stopnia równego p i większego oraz dla funkcji różniczkowalnych dostatecznie wiele razy, błąd przybliżenia całki kwadraturą szacuje się zgodnie z nierównością

$$|I(f) - S(f)| \leq \frac{M_p}{p!} (b-a)^{p+1} \cdot c, \quad (4.3)$$

gdzie: p - rząd dokładności, $M_p = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(p)}(x)|$, c - stała.

Ponieważ w kwadraturze (4.2) dysponujemy $2n+2$ parametrami, maksymalny rząd dokładności jaki możemy osiągnąć jest równy $2n+2$.

Całkowanie numeryczne funkcji

Istnieją klasy kwadratur (kwadratury Gaussa), w których węzły x_i i współczynniki A_i wybiera się tak, że ten maksymalny rząd dokładności jest osiągany.

Często jednak wygodniej jest w praktyce, aby kwadratura spełniała pewne warunki kosztem zmniejszonego rzędu dokładności.

Na przykład, warunek równych współczynników wynika z faktu, że kwadratury z takimi współczynnikami są bardziej odporne na kumulację błędów zaokrągleń.

Natomiast warunek równoodległości węzłów wynika z częstej potrzeby całkowania funkcji dyskretnych danych w postaci tablicy wartości zmierzonych w (teoretycznie) równoodległych punktach.

Kwadratury Newtona-Cotesa

Kwadratury te są najczęściej stosowane w praktyce, z powodu prostoty współczynników A_i i równoodległych węzłów x_i .

Ustalamy węzły $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, gdzie $h = (b-a)/n$.

Wszystkie $n+1$ współczynników A_i możemy dobrać tak, aby kwadratura (4.2) była dokładna dla wielomianów co najmniej stopnia n .

Współczynniki wyznaczamy zastępując funkcję podcałkową wielomianem interpolacyjnym postaci Lagrange'a stopnia n dla węzłów równoodległych (3.8).

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b LR_n(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} q_{n+1}(m)}{i!(n-i)!(m-i)} y_i dx,$$

gdzie: $q_{n+1}(m) = m(m-1)\dots(m-n)$, $m = (a-x_0)/h$, $y_i = f(x_i)$.

W otrzymanych współczynnikach Cotesa

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i} q_{n+1}(m)}{i!(n-i)!(m-i)} dx,$$

korzystając z faktu, że $x = x_0 + m \cdot h$, $dm = dx/h$ wykonamy zmianę zmiennej całkowania. Otrzymamy

Kwadratury Newtona-Cotesa

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i! (n-i)!} \int_0^n \frac{q_{n+1}^{(m)}}{m-i} dm \quad i=0,1,\dots,n. \quad (4.4)$$

Ze wzoru (4.4) można obliczyć współczynniki A_i dla dowolnego n . Z przyczyn, które wyjaśnimy poniżej, w praktyce najczęściej stosujemy kwadratury tego typu dla $n = 1, 2, 3$.

Dla $n = 1$ otrzymujemy współczynniki $A_0 = \frac{1}{2} h$, $A_1 = \frac{1}{2} h$.

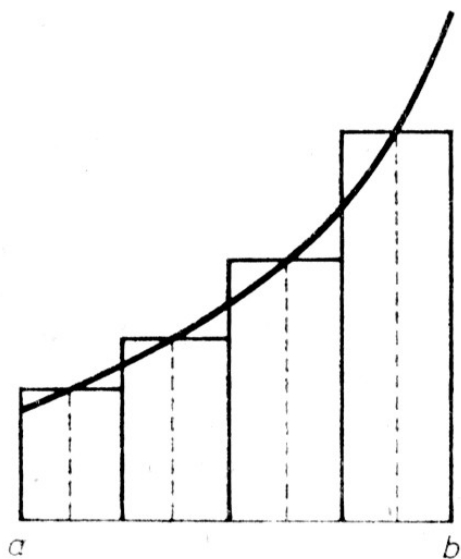
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{1}{2} h(y_0 + y_1) + R_1. \quad (4.5)$$

Wzór (4.5) nazywamy **wzorem lub kwadraturą trapezów.**

Błąd tego wzoru można oszacować następująco

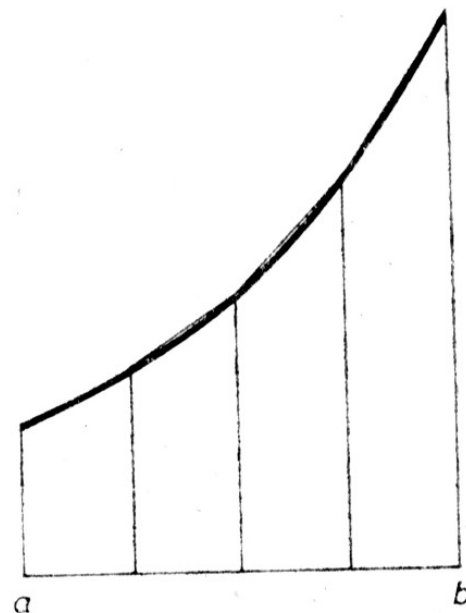
$$|R_1| \leq \frac{1}{12} h^3 M_2, \quad \text{gdzie} \quad M_2 = \max_{x \in \langle x_0, x_1 \rangle} |f''(x)|.$$

Wzór trapezów vs. wzór prostokątów



metoda prostokątów

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)h$$



metoda trapezów

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}h$$

Kwadratury Newtona-Cotesa

Dla $n = 2$, $A_0 = \frac{1}{2} h$, $A_1 = \frac{4}{3} h$, $A_2 = \frac{1}{3} h$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + y_2) + R_2. \quad (4.6)$$

Błąd tego wzoru spełnia nierówność

$$|R_2| \leq \frac{1}{90} h^5 M_4,$$

gdzie $M_4 = \max_{x \in \langle x_0, x_2 \rangle} |f^{(4)}(x)|$.

Wzór (4.6) nazywamy wzorem parabol lub wzorem Simpsona.

Z oszacowania R_2 wynika, że wzór Simpsona jest dokładny nie tylko dla wielomianów stopnia drugiego, lecz także dla wielomianów stopnia trzeciego, jest więc rzędu 4.

Kwadratury Newtona-Cotesa

Dla $n = 3$

$$A_0 = \frac{3}{8} h, A_1 = \frac{9}{8} h, A_2 = \frac{9}{8} h, A_3 = \frac{3}{8} h;$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3}{8} h (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + R_3. \quad (4.7)$$

Błąd wzoru

$$|R_3| \leq \frac{3}{80} h^5 M_4 \quad \text{dla} \quad x \in \langle x_0, x_3 \rangle.$$

Wzór (4.7) nazywamy **wzorem Newtona.**

Kwadratury Newtona-Cotesa

Porównując (4.6) oraz (4.7), można stwierdzić, że kwadratury oparte na nieparzystej liczbie węzłów mają rząd dokładności wyższy o jeden niż liczba użytych węzłów.

Dla ułatwienia zapamiętania podanych tu kwadratur, zauważmy, że współczynniki Cotesa są symetryczne, czyli $A_i = A_{n-i}$, $i = 0, 1, \dots, n$ oraz że

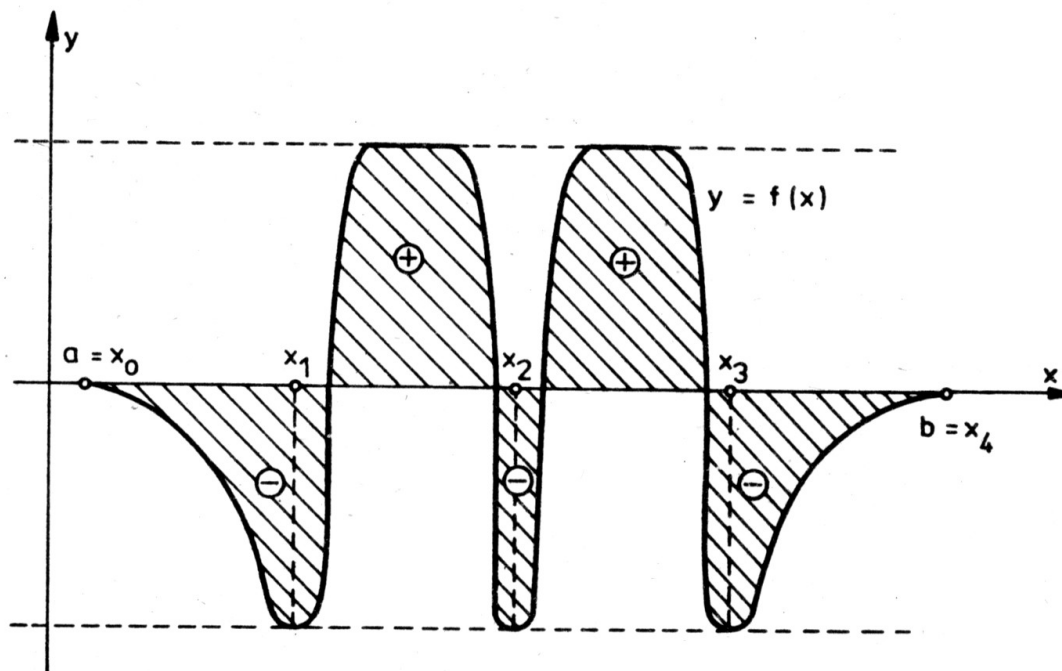
$$\sum_{i=0}^n A_i = b-a.$$

Dokładność wzorów kwadratur z ustaloną liczbą węzłów zależy w sposób istotny od ich rozmieszczenia.

Kwadratury Newtona-Cotesa - przykład

Przykład 4.1. Jeżeli dla obliczenia wartości całki

$I = \int_a^b f(x) dx$ funkcji jak na rysunku 4.1 użyjemy wzoru Newtona-Cotesa opartego na pięciu równoodległych węzłach $a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = b$, otrzymamy wartość $I < 0$, podczas gdy wyraźnie widać, że $I > 0$.



Rys.4.1

Z tego względu odległości pomiędzy węzłami powinny być zdecydowanie mniejsze niż odległości pomiędzy zerami funkcji $f(x)$ i jej pochodnej $f'(x)$.

Całkowanie cd.

- metoda Romberga
- kwadratury Gaussa
 - całkowanie funkcji osobliwych
- metoda Monte-Carlo

Metoda Romberga

Metoda Romberga – jedna z metod całkowania numerycznego, opierająca się na metodzie ekstrapolacji Richardsona, pozwalająca przybliżać wartość całki:

$$\int_a^b f(x)dx$$

nieznanej (jawnie) funkcji f . Funkcja ta jest zazwyczaj znana tylko na dyskretnym zbiorze argumentów (np. jako wynik pomiarów stanu urządzenia (wartość funkcji) dla różnych stanów (argument funkcji)).

Niech dany będzie zbiór $a = x_0, x_1, \dots, x_{2^i} = b$ dzielących przedział (a, b) na 2^i równych części takich, że znane są wartości funkcji: $f(x_i) = y_i$

Niech $h_i = \frac{b-a}{2^i}$, oznacza długość kroku.

Metoda Romberga

Metodę Romberga można opisać rekurencyjnie:

$$\begin{cases} R_{0,i} & : R_{2^i} = h_i \cdot \sum_{k=0}^{2^i-1} \left(\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right) \\ R_{m,i} & : \frac{4^m \cdot R_{m-1,i+1} - R_{m-1,i}}{4^m - 1} \end{cases}$$

$R_{0,i}$ jest wzorem trapezów, po obliczeniu pierwszej wiersza tzw. *tablicy Romberga*, kolejne kolumny obliczane są rekurencyjnie, otrzymując coraz lepsze przybliżenie funkcji:

$$\begin{array}{l} R_{0,0} \\ R_{0,1} \ R_{1,0} \\ R_{0,2} \ R_{1,1} \ R_{2,0} \\ R_{0,3} \ R_{1,2} \ R_{2,1} \ R_{3,0} \dots \end{array}$$

Kwadratury Gaussa

Kwadraturami Gaussa nazywamy metody całkowania numerycznego polegające na takim wyborze wag $w_1, w_2, \dots, w_n$ i węzłów interpolacji $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$ aby wyrażenie

$$\sum_{i=1}^n w_i f(t_i)$$

najlepiej przybliżało całkę

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x) dx$$

gdzie f jest dowolną funkcją określoną na odcinku $[a, b]$, a w jest tzw. *funkcją wagową*

Kwadratury Gaussa

Funkcja wagowa musi spełniać warunki:

1. $w(x) \geq 0$,
2. $\forall_{k \in \mathbb{N}} \int_a^b x^k w(x) dx$ jest skończona,
3. Jeżeli p jest wielomianem takim, że $\forall_{x \in [a,b]} p(x) \geq 0$, to jeśli $\int_a^b w(x)p(x)dx = 0$, mamy wtedy $p \equiv 0$.

Określmy iloczyn skalarny z wagą

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx.$$

Powiemy, że dwa wielomiany są ortogonalne względem tego iloczynu skalarnego jeśli $\langle f, g \rangle_w = 0$.

Kwadratury Gaussa

Wszystkie kwadratury Gaussa wywodzą się z twierdzenia udowodnionego przez niego:

a) Jeżeli $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$ są pierwiastkami n -tego wielomianu ortogonalnego $p_n(x)$ oraz $w_1, w_2, \dots, w_n$ są rozwiązaniami układu równań:

$$\begin{cases} p_0(t_1)w_1 + \dots + p_0(t_n)w_n = \langle p_0, p_0 \rangle_w \\ p_1(t_1)w_1 + \dots + p_1(t_n)w_n = 0 \\ \vdots \\ p_{n-1}(t_1)w_1 + \dots + p_{n-1}(t_n)w_n = 0 \end{cases}$$

to dla każdego wielomianu p stopnia nie większego niż $2n-1$ zachodzi

$$\int_a^b w(x)p(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i p(t_i). \quad (*)$$

Ponadto $w_i > 0$.

Kwadratury Gaussa

- b) Jeżeli dla pewnego ciągu węzłów $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ oraz ciągu wag $v_1, v_2, \dots, v_n$ dla dowolnego wielomianu p stopnia nie większego niż $2n-1$ zachodzi warunek (*), to $x_i = t_i$ oraz $v_i = w_i$ z dokładnością do kolejności.
- c) Dla dowolnego ciągu węzłów $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ oraz ciągu wag $v_1, v_2, \dots, v_n$ nie istnieje wielomian stopnia $2n$, dla którego nie zachodzi warunek (*).

Kwadratury Gaussa

Kwadratury z przedziału $[-1, 1]$ z wagą $w \equiv 1$ nazywamy

kwadraturami Gaussa-Legendre'a

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(t_i),$$

gdzie t_i to pierwiastki n -tego wielomianu Legendre'a.

Kwadratury z wagą $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nazywamy **kwadraturami Gaussa-Czebyszewa**

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{i=1}^n w_i f(t_i),$$

gdzie t_i to pierwiastki n -tego wielomianu Czebyszewa.

Kwadratury Gaussa

Kwadratury z wagą $w(x) = e^{-x^2}$ nazywamy **kwadraturami Gaussa-Hermite'a**

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(t_i),$$

gdzie t_i to pierwiastki n -tego wielomianu Hermite'a.

Kwadratury z wagą $w(x) = e^{-x}$ nazywamy **kwadraturami Gaussa-Laguerre'a**

$$I(f) = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(t_i),$$

gdzie t_i to pierwiastki n -tego wielomianu Laguerre'a.

Kwadratury z wagą $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ nazywamy **kwadraturami Gaussa-Jacobiego**

$$I(f) = \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(t_i)$$

Kwadratury Gaussa - wybór

trudna sprawa 😊

ale można całkować funkcje
osobliwe na brzegu

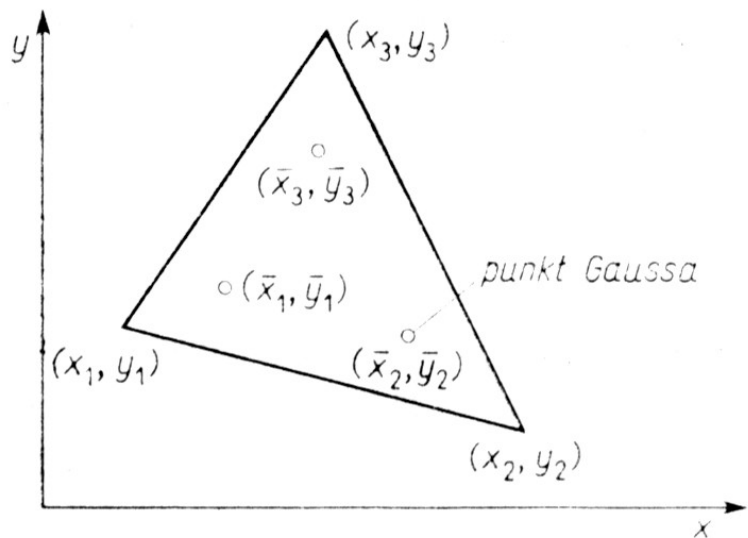
Całkowanie po powierzchni

Całkowanie po powierzchni trójkąta

Dana jest funkcja $f(x, y)$ oraz współrzędne (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) wierzchołków trójkąta. Należy obliczyć całkę podwójną

$$J = \iint f(x, y) dx dy$$

rozciągniętą na obszar trójkąta. całkę tę można przybliżyć sumą



$$J = A \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) w_i$$

Całkowanie po powierzchni

$$J = A \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) w_i,$$

w której A jest polem powierzchni trójkąta, $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ – współrzędnymi punktu Gaussa, w_i – jego wagą. Pole A oblicza się ze wzoru

$$A = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] .$$

Współrzędnymi punktów Gaussa są:

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^3 h_{ij} x_j, \quad \bar{y}_i = \sum_{j=1}^3 h_{ij} y_j .$$

Całkowanie po powierzchni

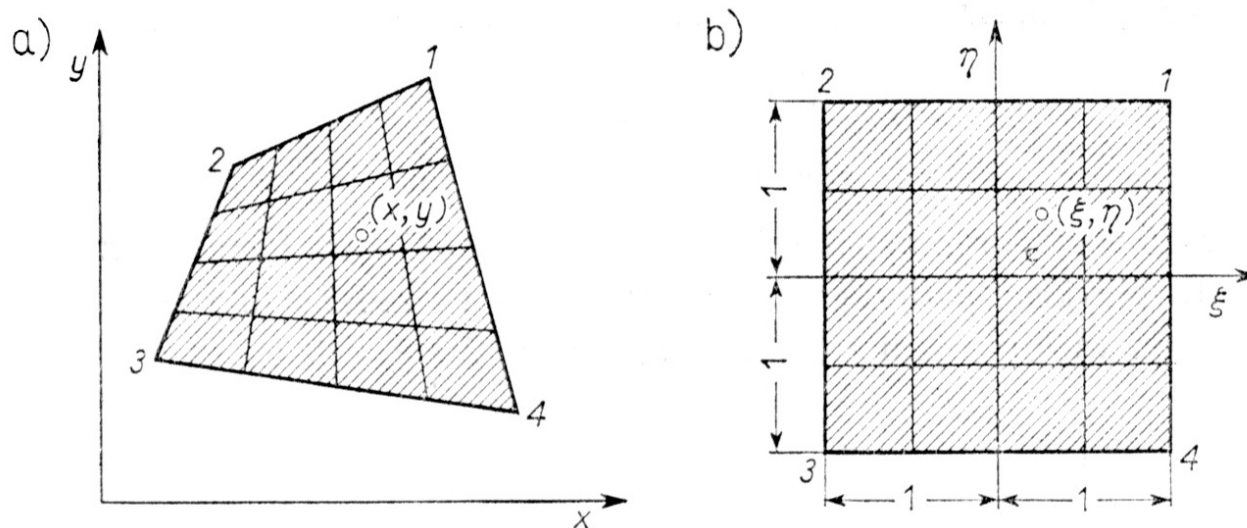
Współczynniki do całkowania numerycznego po powierzchni trójkąta

n	i	w_i	h_{i1}	h_{i2}	h_{i3}
1	1	1.00000000	0.33333333	0.33333333	0.33333333
2	1	0.33333333	0.0	0.5	0.5
	2	0.33333333	0.5	0.0	0.5
	3	0.33333333	0.5	0.5	0.0
5	1	0.22500000	0.33333333	0.33333333	0.33333333
	2	0.13239415	0.05971587	0.47014206	0.47014206
	3	0.13239415	0.47014206	0.05971587	0.47014206
	4	0.13239415	0.47014206	0.47014206	0.05971587
	5	0.12593918	0.79742699	0.10128651	0.10128651
	6	0.12593918	0.10128651	0.79742699	0.10128651
	7	0.12593918	0.10128651	0.10128651	0.79742699

Całkowanie po powierzchni

Całkowanie po powierzchni czworoboku

Funkcja $f(x, y)$ jest określona wewnątrz czworoboku (rys. 8.4a) o wierzchołkach (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) . Zajmiemy się obliczeniem



Rys. 8.4.

całki podwójnej (8.7) rozciągniętej na jego pole. W tym celu dokonamy przekształcenia współrzędnych x, y w ξ, η , w których czworobok przekształca się w kwadrat 2×2 (rys. 8.4b). Współrzędnym punktu (ξ, η) odpowiadają współrzędne punktu (x, y) według następującego wzoru:

Całkowanie po powierzchni

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i, \quad (8.12)$$

gdzie $N_i(\xi, \eta)$ są to tak zwane funkcje kształtu

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta). \quad (8.13)$$

Wzory te pozwalają obliczyć pochodne x'_{ξ} , x'_{η} , y'_{ξ} , y'_{η} , a następnie utworzyć z nich jacobian przekształcenia

$$D = \begin{vmatrix} x'_{\xi} & x'_{\eta} \\ y'_{\xi} & y'_{\eta} \end{vmatrix}. \quad (8.14)$$

W nowych współrzędnych całka przedstawia się następująco:

$$J = \iint f(x, y) dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (8.15)$$

gdzie funkcją podcałkową jest

$$F(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) D(\xi, \eta). \quad (8.16)$$

Do całki podwójnej po polu kwadratu można zastosować dwukrotnie przybliżoną kwadraturę Gaussa (8.4). Mamy zatem

$$J \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j F(h_i, h_j), \quad (8.17)$$

gdzie wagi w_i , w_j oraz współrzędne h_i , h_j punktów Gaussa bierze się z tabl.

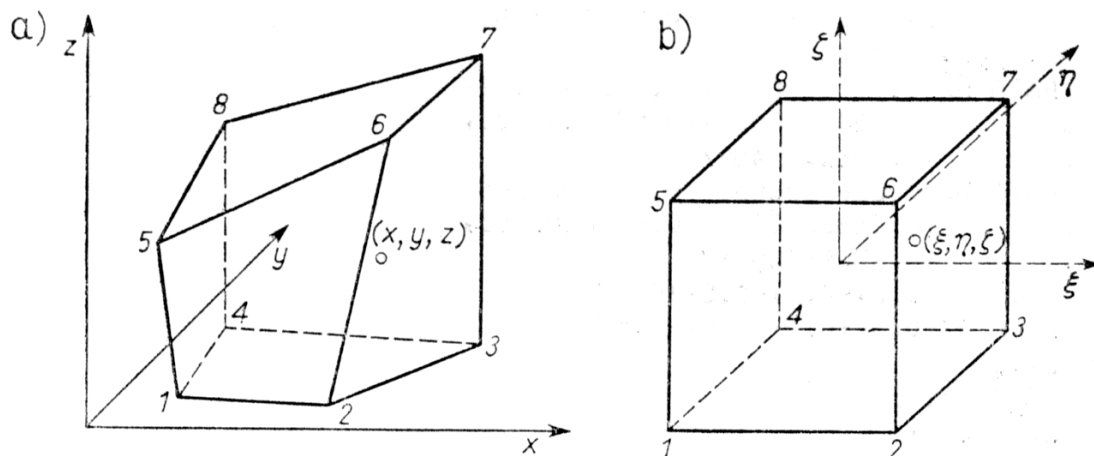
Całkowanie po objętości

Całkowanie po objętości sześcianu

Sposób postępowania opisany w poprzednim punkcie można rozszerzyć na trzy wymiary.

Znaleźć należy całkę

$$J = \iiint f(x, y, z) dx dy dz \quad (8.18)$$



Rys. 8.5.

po objętości sześcianu nieregularnego (rys. 8.5a) określonego przez współrzędne (x_i, y_i, z_i) wierzchołków. Stosujemy przekształcenie współrzędnych analogiczne do (8.12), przy czym funkcje kształtu mają teraz postać

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta). \quad (8.19)$$

Różniczkowanie funkcji

- przeważnie źle uwarunkowane w odróżnieniu od całkowania
- wzór różnicowy
- interpolacja wielomianowa metodą wygładzenia funkcji i zapewnienie ciągłości pochodnej

Metody całkowania równań różniczkowych

- Metody różnicowe
- Metoda Eulera
- Metody Rungego-Kutty
- Metody typu predyktor-korektor
- Metoda wstecznego różniczkowania

Metody całkowania równań różniczkowych

- Metody jawne

$$Y(t + \Delta t) = F(Y(t))$$

- Metody niejawne

$$G(Y(t), Y(t + \Delta t)) = 0$$

Metody całkowania równań różniczkowych

- Metody jawne
 - oblicza stan w kroku następnym na podstawie stanu bieżącego – łatwiejsze ale wymagać może małego kroku całkowania
- Metody niejawne
 - rozwiązuje zagadnienie łączące stan obecny ze stanem przyszłym – trudniejsze ale na ogół pewniejsze; może być niezbędne dla równań sztywnych (stiff)