Metody Numeryczne w Budowie Samolotów/Śmigłowców

Wykład III

dr inż. Tomasz Goetzendorf-Grabowski
(tgrab@meil.pw.edu.pl)

Dęblin, 25 maja 2009

Zawartość wykładu

- Rozwiązywanie równań różniczkowych
- Wyznaczanie wartości własnych macierzy
- Układy równań liniowych

Literatura

- Marianna Ufnalska, *Laboratorium metod numerycznych FORTRAN 1900*, Wyd. PW, Wraszawa 1982
- Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., *Metody Numeryczne*, WNT, Warszawa 1982
- Krupowicz A., *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych,* PWN, Warszawa 1986
- Szmelter J., Metody komputerowe w mechanice, PWN, Warszawa 1980

Metody całkowania równań różniczkowych

- Metody różnicowe
- Metoda Eulera
- Metody Rungego-Kutty
  - Praca C.Rungego (1895 r.)
  - Praca M.W.Kutty (1901 r.)
- Metody typu predyktor-korektor
  - praca Adamsa i Bashfortha (1883 r.)
- Metoda wstecznego różniczkowania

Metody całkowania równań różniczkowych

- Metody jawne

$$Y(t + \Delta t) = F(Y(t))$$

- Metody niejawne

$$G(Y(t), Y(t + \Delta t)) = 0$$

Metody całkowania równań różniczkowych

- Metody jawne
  - oblicza stan w kroku następnym na podstawie stanu bieżącego – łatwiejsze ale wymagać może małego kroku całkowania
- Metody niejawne
  - rozwiązuje zagadnienie łączące stan obecny ze stanem przyszłym – trudniejsze ale na ogół pewniejsze; może być niezbędne dla równań sztywnych (stiff)

Metoda Eulera

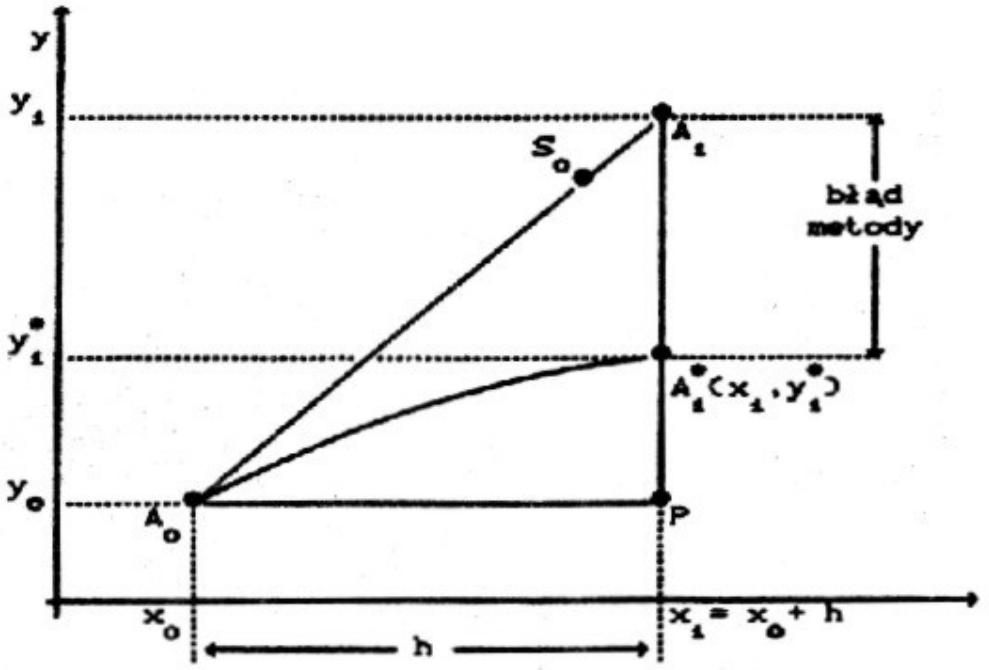
Metoda Eulera jest najprostszą metodą przybliżoną dla zagadnienia początkowego:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \quad , \quad x \in [x_0, b]$$

z warunkiem początkowym

$$y(x_0) = y_0$$

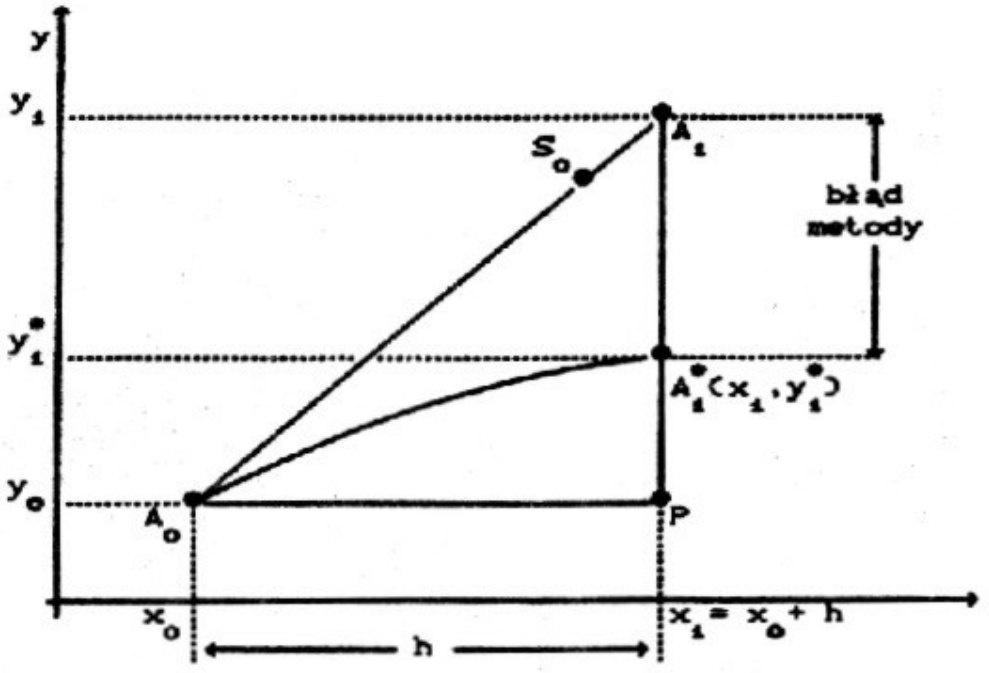
Aby rozwiązać to równanie, musimy znaleźć wartość funkcji $y=y(x)$ w punkcie: $x=x_1=x_0+h$.



Metoda Eulera

Załóżmy, że $y_1^* = y(x_1)$ i krzywa $(A_0A_1^*)$ jest rozwiązaniem równania.

Zauważmy, że znając punkt $A_0=(x_0,y_0)$ (warunek początkowy) możemy policzyć wartość funkcji f w tym punkcie. Jest to pochodna a więc współczynnik kierunkowy stycznej do rozwiązania równania w x_0. Wyznaczamy zatem tę styczną - prosta (A_0S_0).
Wyznaczmy punkt przecięcia tej stycznej z prostą $x=x_1$, oznaczmy go przez $A_1=(x_1,y_1)$ i przyjmijmy, że $y_1=y(x_1)$. Przy takim postępowaniu popełnimy błąd w wyznaczaniu wartości $y(x_1)$, na rysunku jest on zaznaczony jako błąd metody. Możemy również przypuszczać, że błąd ten będzie malał wraz z h.



Metoda Eulera

Zapiszmy sposób liczenia y_1 w postaci wzoru. Z trójkąta (A_0A_1P) mamy

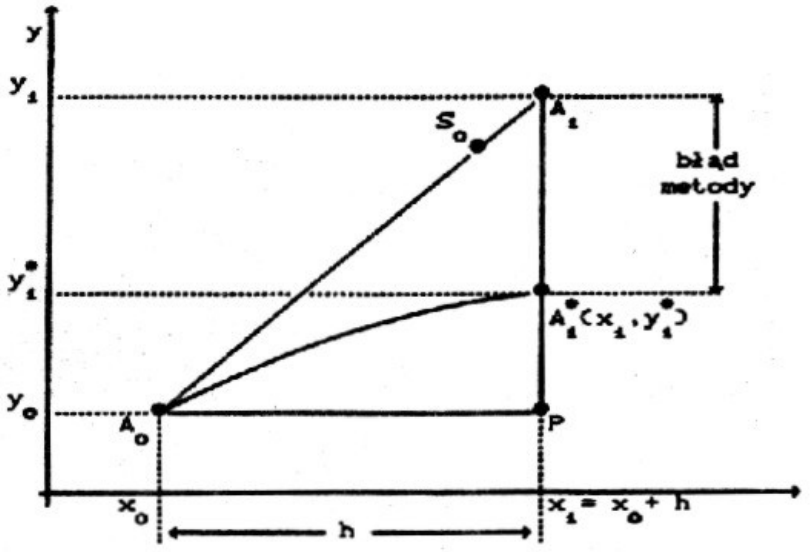
$$\frac{y_1 - y_0}{h} = f(x_0, y_0)$$

a stąd : $y_1 = +y_0 + hf(x_0, y_0)$

Chcąc wyznaczyć wartość funkcji y w punkcie $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$ postępujemy analogicznie wykorzystując obliczone uprzednio wartości.

$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, $i = 0,1,2,...$

gdzie y_{i+1} jest wartością funkcji będącej rozwiązaniem równania różniczkowego w punkcie x_{i+1} czyli $y_{i+1} = y(x_{x+1})$, $x_{i+1} = x_0 + (i+1)h$ dla $i = 0,1,2,...$



Metoda Eulera

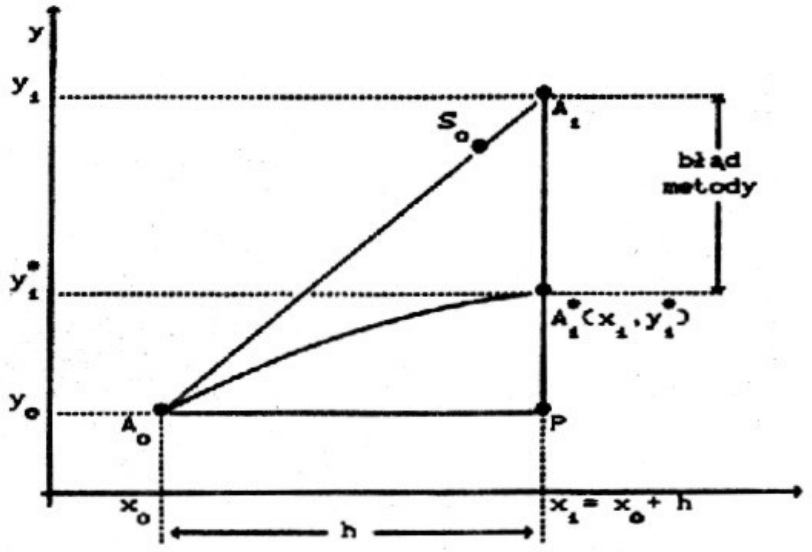
Metodę Eulera możemy skonstruować również w inny sposób. A mianowicie zastąpmy funkcję $y=y(x)$ w punkcie $x= x_0+h$ jej rozwinięciem w szereg Taylora (zakładamy odpowiednią regularność y).

$$y(x_0+h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \ldots$$

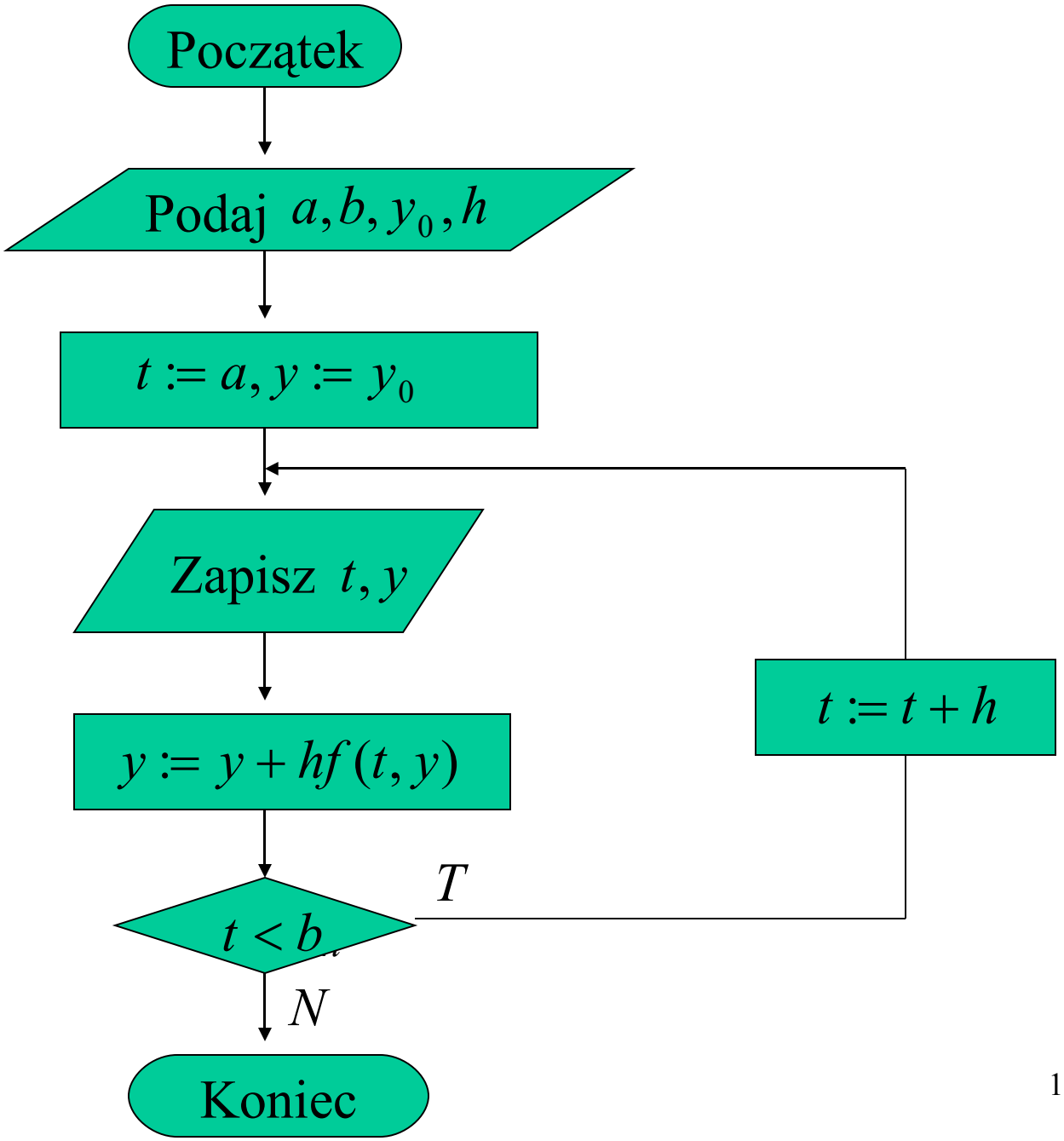
Jeśli w rozwinięciu Taylora wykorzystamy tylko dwa pierwsze człony, to otrzymujemy:

$$y(x_0+h) \cong y(x_0) + hy'(x_0) = y(x_0) + hf(x_0, y_0)$$

Otrzymaliśmy zatem wzór analogiczny jak w poprzednim rozumowaniu



Algorytm metody Eulera

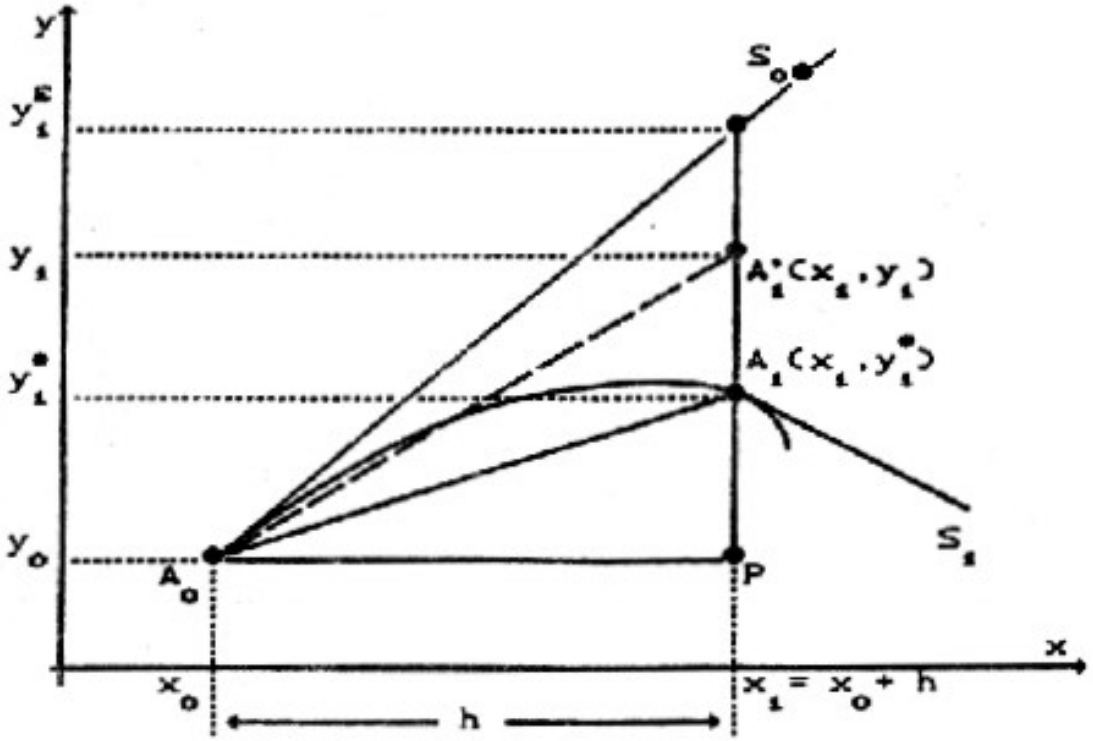


Metoda Runge-Kutty

Mamy zagadnienie początkowe:

$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$, $x \in [x_0, b]$ z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$

Podobnie jak w metodzie Eulera chcemy znaleźć wartość funkcji $y=y(x)$ w punkcie: $x=x_1=x_0+h$.



Metoda Runge-Kutty

Załóżmy, że rozwiązanie zadania jest parabolą i skorzystajmy z następującej własności paraboli:

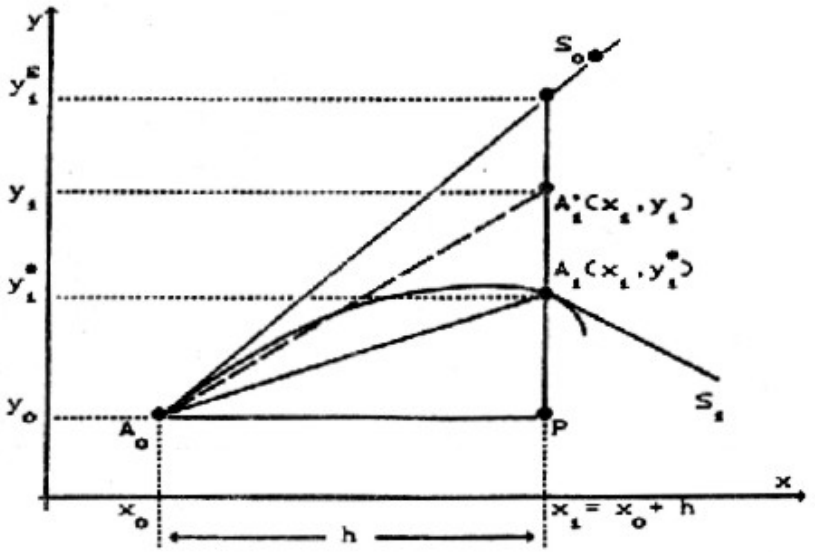
- współczynnik kierunkowy siecznej (A_0A_1) jest średnią arytmetyczną współczynnika kierunkowego stycznej (A_0S_0) i stycznej (A_1S_1).

Współczynnik kierunkowy stycznej (A_0S_0) umiemy wyznaczyć: jest to $f(x_0,y_0)$. Wyznaczmy przybliżoną wartość funkcji y, w punkcie $x=x_1$ tak, jak to robiliśmy w metodzie Eulera, czyli

$$y_1^E = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Teraz możemy wyznaczyć przybliżoną wartość współczynnika kierunkowego stycznej (A_1S_1), wynosi on

$$f(x_0 + h, y_1^E) = f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))$$



Metoda Runge-Kutty

Następnie wyznaczmy współczynnik kierunkowej siecznej (A_0A_1), jest on równy

$\frac{1}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))]$

Jest to przybliżona wartość tego współczynnika ze względu na sposób liczenia y_1^E. Zamiast siecznej (A_0A_1) mamy sieczną (A_0A_1'). Z trójkąta A_0PA_1' policzymy:

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{1}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))]$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))]$$

Uporządkujemy dotychczasowe rozwiązania wprowadzając oznaczenia:

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = hf(x_1, y_0 + k_1))]$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Wzory te są wzorami Runge-Kutty II rzędu. Można wykazać, że całkowity błąd metody jest rzędu $O(h^2)$.

Metoda Runge-Kutty

Spróbujmy dojść do tych samych wzorów inną drogą i wyprowadzić wzory Runge-Kutty wyższych rzędów. Zapiszmy uogólnienie algebraiczne:

$$k_1 = hf(x_0, y_0),$$

$$k_2 = hf(x_0 + ah, y_0 + \alpha k_1),$$

$$k_3 = hf(x_0 + bh, y_0 + \beta k_1 + \gamma k_2),$$

$$k_4 = hf(x_0 + ch, y_0 + \delta k_1 + \varepsilon k_2 + \xi k_3),$$

.....

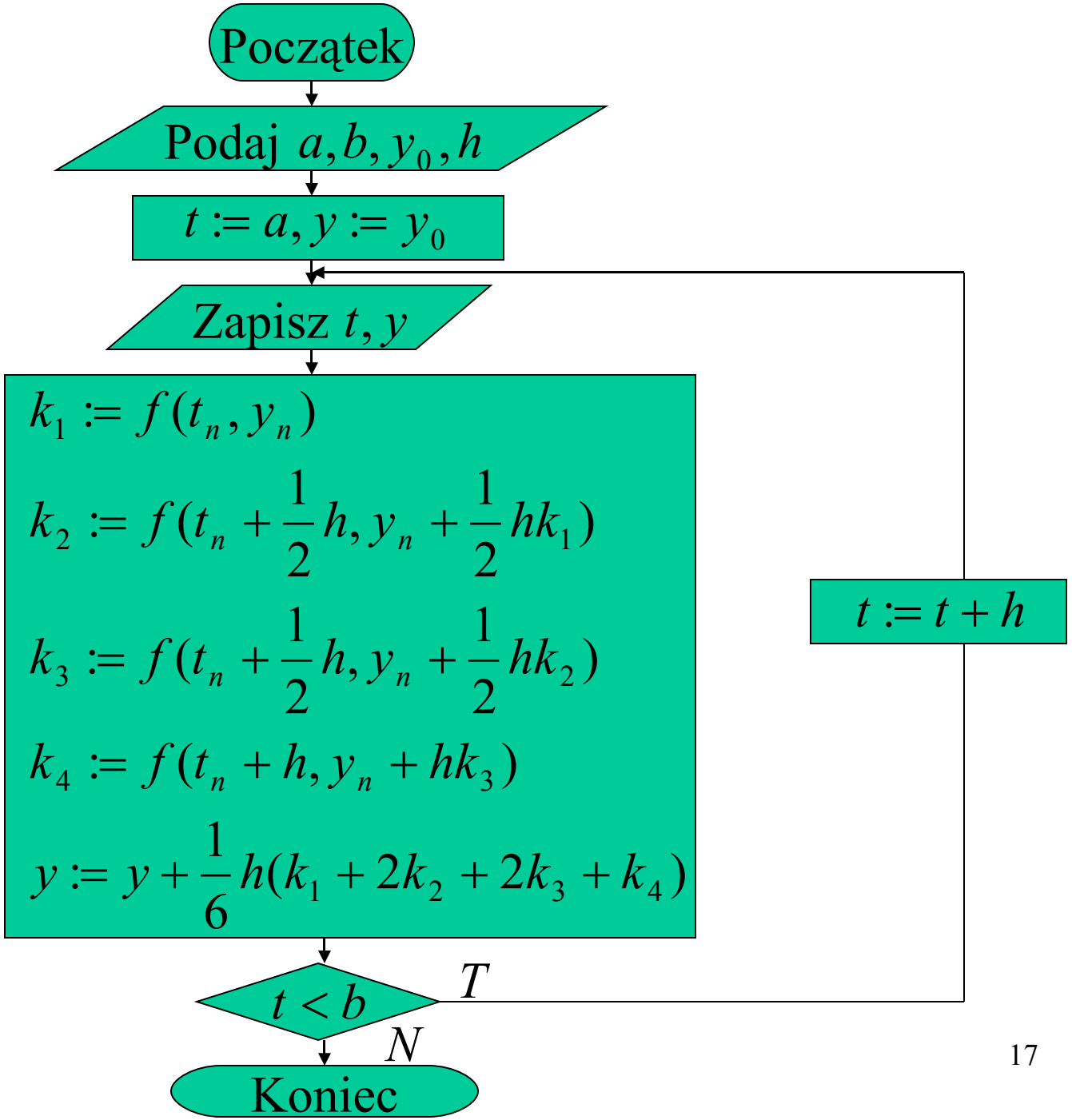
$$y_1 = y_0 + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4 + \ldots$$

Będziemy szukać stałych $a,b,c,\ldots$, $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ oraz $w_1,w_2,w_3,\ldots$ takich, by wartość funkcji $y(x)$ dla $x=x_1$, czyli y_1 była możliwie bliska wartości dokładnej. Uzyskamy to rozwijając w szereg Taylora funkcję przybliżoną i ścisłą, żądając zgodności (do wyrazu odpowiedniego rzędu) tych rozwinięć.

Metoda Runge-Kutty

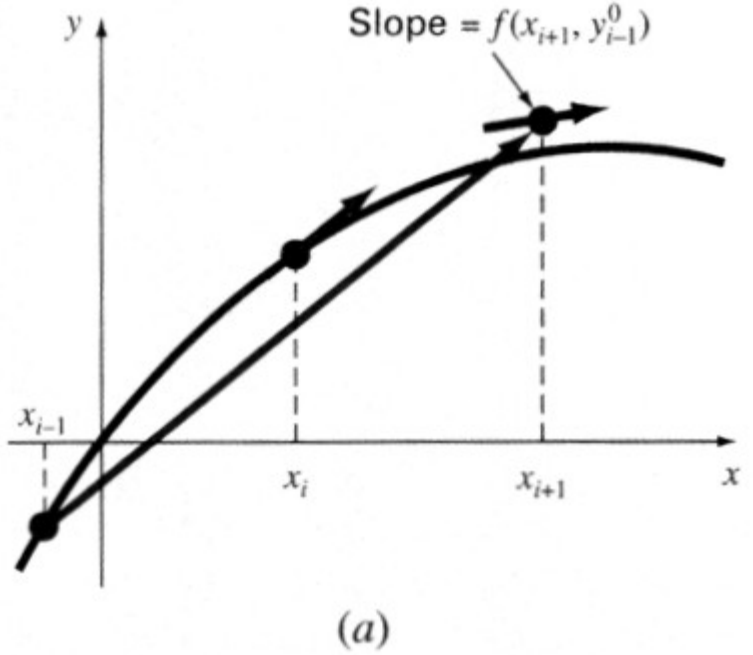
Rząd metody P	Stałe (wzór 3) w	Wartości współczynników k	Nazwa metody	Błąd lokalny ε	Błąd całkowity E
1	$w_1=1$	$k_1=hf(x_i,y_i)$	Eulera	$O(h^2)$	$O(h)$
2	$w_1=w_2=1/2$	$k_1=hf(x_i,y_i)$ $k_2=hf(x_i+h,y_i+k_1)$	Heuna	$O(h^3)$	$O(h^2)$
3	$w_1=w_3=1/6$ $w_2=2/3$	$k_1=hf(x_i,y_i)$ $k_2=hf(x_i+h/2,y_i+k_1/2)$ $k_3=hf(x_i+h,y_i-k_1+2k_2)$	pokrewna metodzie Simsona	$O(h^4)$	$O(h^3)$
4	$w_1=w_4=1/6$ $w_2=w_3=1/3$	$k_1=hf(x_i,y_i)$ $k_2=hf(x_i+h/2,y_i+k_1/2)$ $k_3=hf(x_i+h/2,y_i+k_2/2)$ $k_4=hf(x_i+h,y_i+k_3)$	klasyczna metoda Runge-Kutty	$O(h^5)$	$O(h^4)$

Algorytm metody R-K

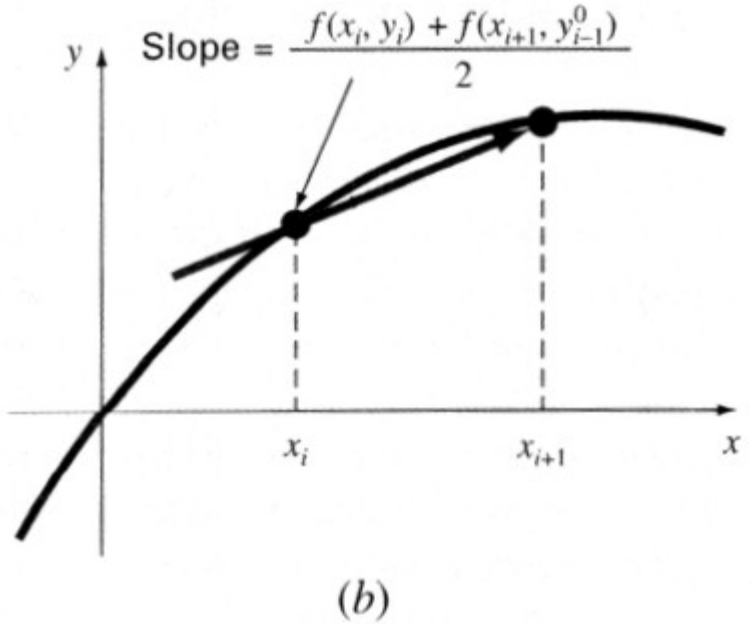


Metody typu predyktor-korektor

- cechy:
  - metoda nie startuje samodzielnie, bo wymaga informacji wstecznej
  - dwa kroki:
    - wstępne oszacowanie rozwiązania – predyktor
    - poprawienie wyniku (iteracyjne) - korektor



(a)



(b)

Metody typu predyktor-korektor

Metody typu predyktor-korektor

Układ równań predyktor, korektor:

$$\begin{cases} y_{i+1}^{0} = y_i + f(x_i, y_i)h \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{0})}{2} h \end{cases}$$

Błędy obu równań są jednak różnych rzędów. Pierwsze - predyktor posiada błąd rzędu $O(h^2)$, natomiast drugie - korektor rzędu $O(h^3)$.
Aby uzyskać w obu przypadkach błąd rzędu $O(h^3)$ i uwzględniając poprzednie rozwiązanie, równanie predyktora zapisujemy w następującej postaci:

$$y_{i+1}^{0} = y_{i-1} + f(x_i, y_i)2h$$

Metody typu predyktor-korektor

Metoda Heuna wielokrokowa - metoda samo-nie startująca

predyktor:

$$y_{i+1}^{0} = y_{i-1}^{m} + f(x_i, y_i^m)2h$$

korektor

$$y_{i+1} = y_i^m + \frac{f(x_i, y_i^m) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{j-1})}{2} h$$

Rozwiązanie metody otrzymujemy na drodze iteracji, która następuje od j=1,...,m
Błąd względny metody wynosi :

$$\left|\varepsilon_0\right| = \left| \frac{y_{i+1}^{j} - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^{j}} \right| \cdot 100\%$$

Metody typu predyktor-korektor

metoda typu predyktor-korektor Adamsa-Bashfortha z predykcją rozwiązania postaci:

$$y_{i+1} = y_i + h \times (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) / 24$$

skojarzona z metodą Adamsa-Moultona do korekcji rozwiązań:

$$y_{i+1} = y_i + h \times (9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) / 24$$

do korekcji predyktora użyto wyrażenia:

$$E_p = 251(y_i(cor) - y_i(pred)) / 270$$

natomiast do poprawienia dokładności korektora:

$$E_p = -19(y_{i+1}(cor) - y_{i+1}(pred)) / 270$$

Metody typu predyktor-korektor

metoda wielokrokowa - metoda Milne`a-Hamminga z predyktorem w postaci:

$$y_{i+1} = y_{i-3} + 4h \times (2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}) / 3$$

modyfikowanym przez człon postaci:

$$E_p = 112(y_i(cor) - y_i(pred)) / 121$$

i korektorem:

$$y_{i+1} = (9y_i - y_{i-2} + 3h \times (f_{i+1} + 2f_i 5f_{i-1})) / 8$$

zmodyfikowanym przez:

$$E_p = -9(y_{i+1}(cor) - y_{i+1}(pred)) / 121$$

Wyniki testów

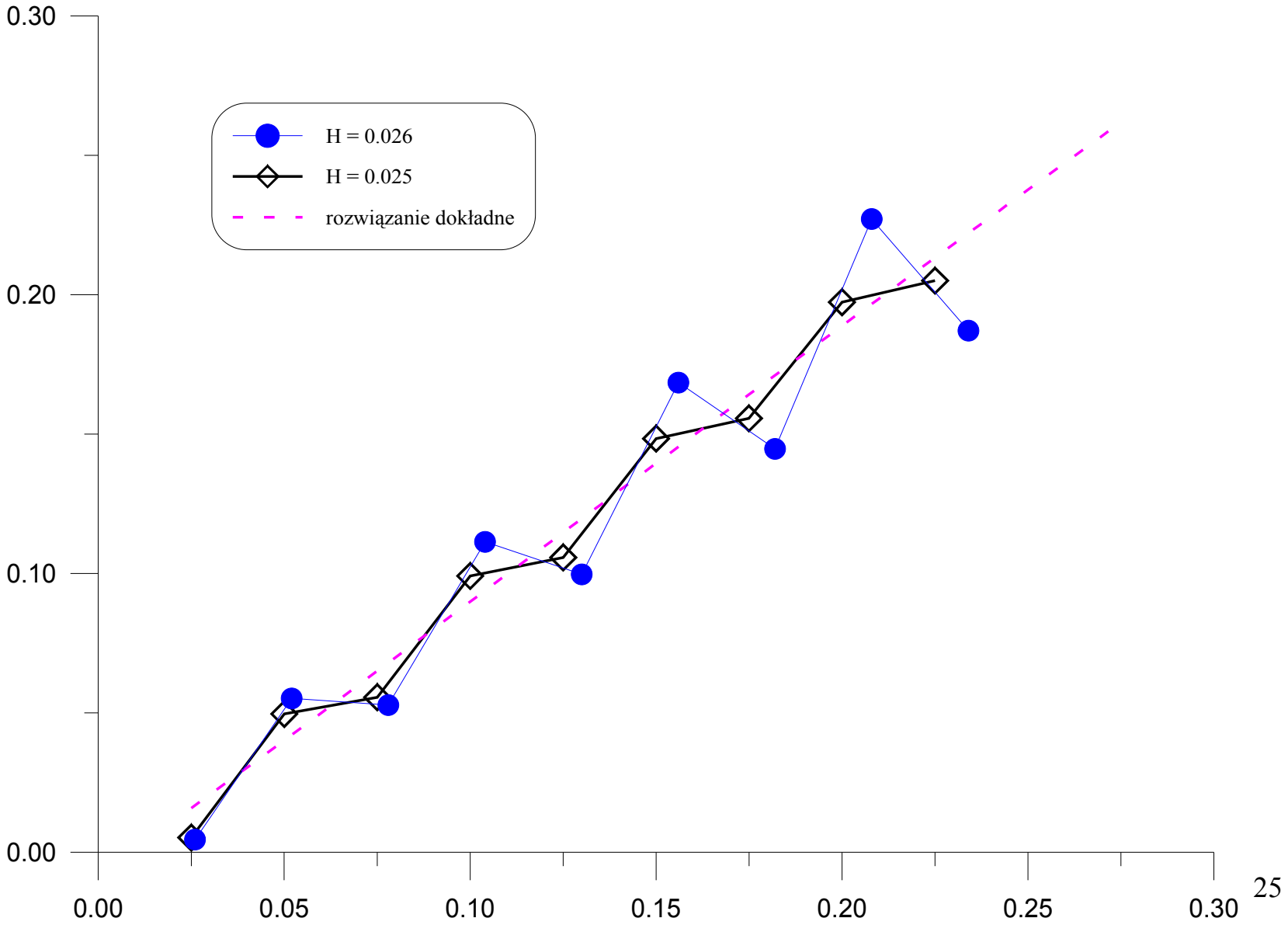
Metody stało krokowe poddano testowi polegającemu na rozwiązaniu równania:

$$\frac{dy}{dt} = 100(\sin t - y(t))$$

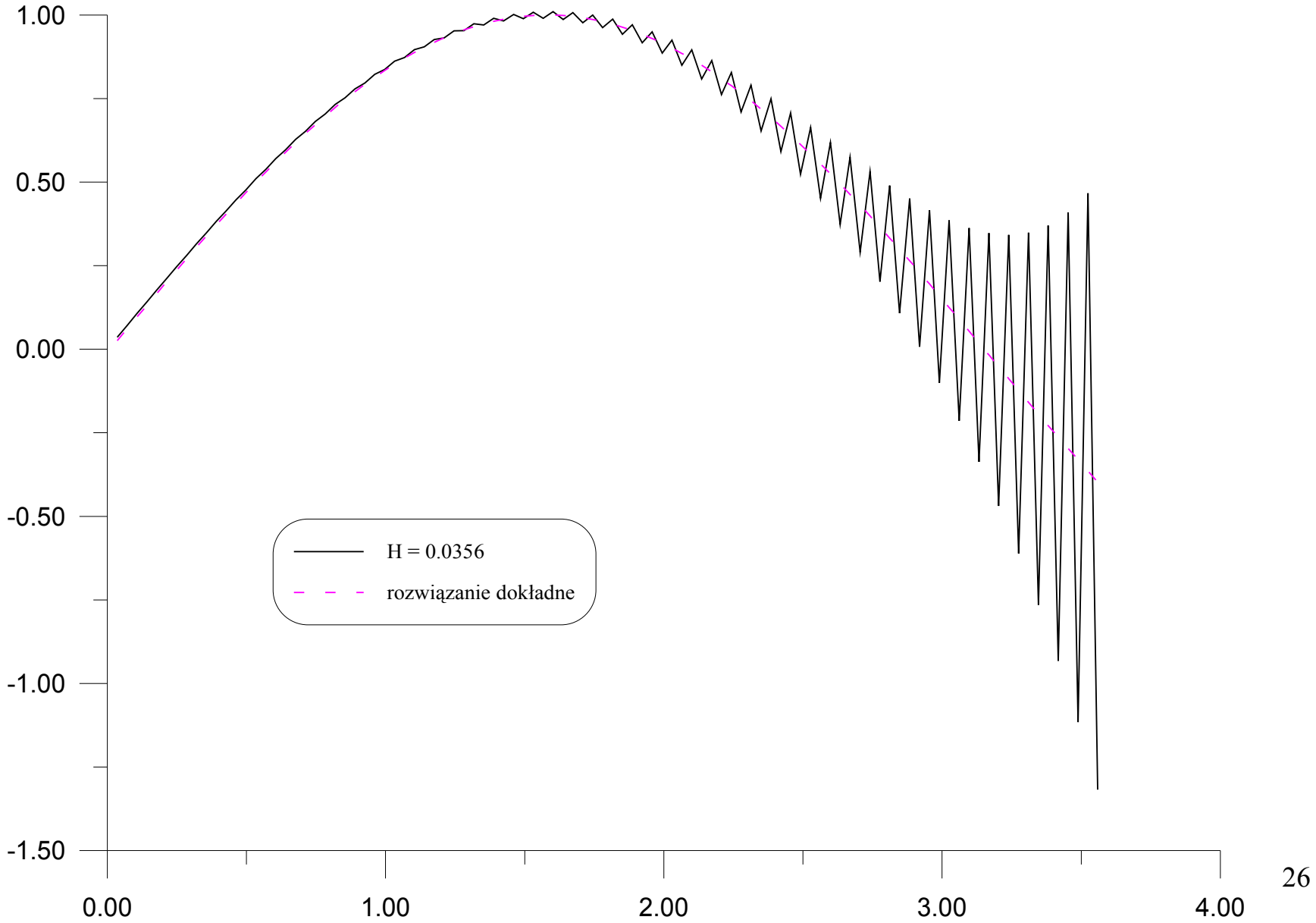
którego rozwiązanie dokładne ma postać:

$$y(t) = (\sin t - 0.01\cos t + 0.01e^{-100t}) / 1.0001$$

Wyniki testów – metoda Ralstona(3)



Wyniki testów – metoda Gragga



Wyniki testów – cd.

Procedury wielokrokowe poddano również testowi na równaniu typu „stiff” postaci:

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda\,(y(t) - f(t)) + \frac{df}{dt}$$

gdzie:

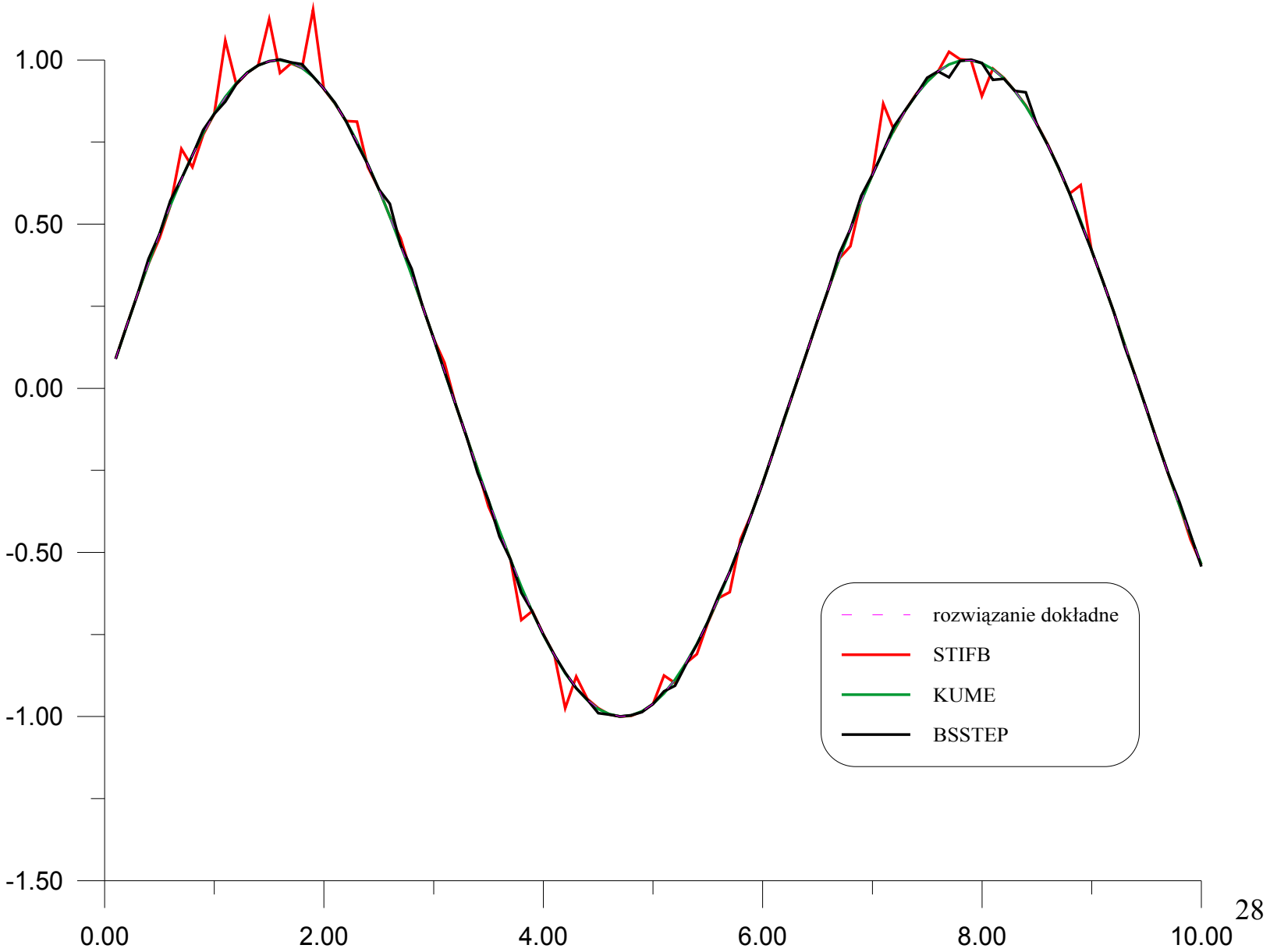
$$f(t) = \frac{3}{1 + 2e^{-t/10}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{f(t)}{10}\left(1 - \frac{f(t)}{3}\right)$$

którego rozwiązanie dokładne ma postać:

$$y(t) = e^{-\Lambda t} + f(t)$$

Wyniki testów – cd.



Wartości własne

Definicja

Wektor x *jest* ***wektorem własnym*** *macierzy* A *jeśli istnieje taka liczba* λ, *że* $Ax = \lambda x$. λ *to* ***wartość własna*** *macierzy* A.

Twierdzenie

Liczba λ *jest wartością własną macierzy* A *wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem* ***wielomianu charakterystycznego*** $\det(A - \lambda I)$ *macierzy* A.

Wartości własne

Twierdzenie

Liczba λ *jest wartością własną macierzy* A *wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem* ***wielomianu charakterystycznego*** $\det(A - \lambda I)$ *macierzy* A.

Definicja

Macierze A *i* B *są* ***podobne*** *jeśli istnieje nieosobliwa* ***macierz podobieństwa*** P, *tj. taka, że* $P^{-1}AP = B$.

Twierdzenie

Macierze podobne mają takie same wartości własne.

Wartości własne

Twierdzenie

Wartości i wektory własne macierzy symetrycznej są rzeczywiste.

Twierdzenie

Wartości własne macierzy A + cI *to wartości własne macierzy* A *przesunięte o* c.

Wartości własne

Macierz trójdiagonalnie symetryczna

Jest to macierz postaci:

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

Taka macierz posiada pojedyncze wartości własne i wektory własne, a można je ze względu na postać macierzy obliczyć wykonując stosunkowo niewielką liczbę działań.

Wartości własne

Twierdzenie

Każdą macierz $A_{m \times n}$, $m \leq n$ *posiadającą* $k \leq n$ *liniowo niezależnych kolumn można przedstawić w postaci iloczynu*

$$A = QR;$$

gdzie $Q_{m \times k}$ *jest macierzą ortogonalną a* $R_{k \times n}$ *jest macierzą trapezoidalną górną.*

Wartości własne

Definicja:

Macierz R *nazywamy trapezoidalną górną, jeżeli wszystkie elementy tej macierzy znajdujące się pod diagonalą są równe zeru,*

$$r_{i,j} = 0 \qquad dla \quad i > j:$$

Definicja:

Macierz B nazywamy ortogonalną jeśli

$$B^T B = I$$

Wartości własne

Metoda potęgowa
Wartości własne z równania charakterystycznego

Metoda QR
Dla zadania własnego z macierzą niesymetryczną najczęściej stosuje się metodę QR.
Jakkolwiek ostateczna wersja metody QR działa dla macierzy niesymetrycznych, wygodnie będzie nam założyć dla przejrzystości ekspozycji, że macierz jest symetryczna i w konsekwencji ma rzeczywiste widmo.

Wartości własne

W najprostszym wariancie (bez przesunięć), ***algorytm QR*** *ma postać:*

$A_1 = A;$

For $k = 1, 2, \ldots$

{

wykonaj rozkład: $A_k = Q_k R_k;$

$R_k Q_k = A_{k+1}$

}

Ponieważ

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k$$

więc każdy krok w algorytmie ***QR*** *jest przekształceniem przez podobieństwo*

Wartości własne

Algorytm - Metoda QR z przesunięciami:

$A_1 = A;$

For $k = 1, 2, \ldots$

{

wybierz sprytnie przesunięcie $s_k;$

wykonaj rozkład $A_k - s_k I = Q_k R_k;$

$A_{k+1} = R_k Q_k + s_k I;$

}

Równania liniowe

- Metoda eliminacji Gaussa
  - niemal tak jak rozwiązujemy „ręcznie”:
    metoda ta jak sama nazwa wskazuje polega na eliminowaniu poszczególnych zmiennych oraz równań. Proces eliminacji prowadzony jest w znany sposób przez wyznaczanie "wartości" jednej zmiennej z jednego równania i wstawianie jej do pozostałych równań. Następnie prowadzony jest proces odwrotny, w którym wyznaczane są dopiero wartości poszczególnych niewiadomych układu równań. Metoda w swojej normalnej postaci jest skuteczna prawie zawsze gdy elementy macierzy współczynników na jej głównej przekątnej nie są równe zeru. W przeciwnym przypadku stosowane są jej modyfikacje z częściowym i pełnym wyborem elementu macierzy.

Równania liniowe – metoda LU

W metodzie LU macierz współczynników zapisywana jest jako iloczyn dwóch macierzy trójkątnych: dolnej (ang. lower - $\mathbf{L}$) i górnej (ang. upper - $\mathbf{U}$), tj. z elementami zerowymi - odpowiednio - powyżej i poniżej przekątnej macierzy.

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Układ równań przyjmuje wówczas postać

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Równania liniowe – metoda LU

a jego rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania dwóch układów równań z macierzami trójkątnymi, które z kolei rozwiązuje się bardzo prosto.

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{y}$$
$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{z}$$

Ostatecznie liczba mnożeń potrzebnych do wyznaczenia wektora x wynosi n^2, dodawań $n^2 - n$.

Wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$ tej postaci można obliczyć korzystając z twierdzenia Cauchy'ego:

$$\det(\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}) = \det(\mathbf{L}) \cdot \det(\mathbf{U})$$

oraz z faktu, że wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem elementów na przekątnej.

Równania liniowe – metoda LU

Otrzymujemy wówczas:

$$\mathbf{det(A) = det(L \cdot U) = det(L) \cdot det(U)} = l_{11} \cdot l_{22} \cdot \dots \cdot l_{nn} \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn}$$

Ponadto przeważnie przy rozkładzie LU na przekątnej jednej z macierzy znajdują się jedynki – wtedy wyznacznik macierzy **A** jest równy wyznacznikowi albo macierzy **L** albo **U**, którego obliczenie wymaga wykonania $n - 1$ mnożeń (zamiast $2n - 1$).

Zalety metody:

- bardzo oszczędna gospodarka pamięcią - całość obliczeń jest wykonywana w tych samych tablicach i wektorach, w których zostały sformułowane wyjściowe równania;
- wymaga najmniejszej liczby operacji w porównaniu z innymi metodami dokładnymi (nie biorąc pod uwagę procedur specjalnych).