Metody Numeryczne w Budowie Samolotów/Śmigłowców

Wykład IV

dr inż. Tomasz Goetzendorf-Grabowski
(tgrab@meil.pw.edu.pl)

Dęblin, 1 czerwca 2009

Literatura

- KATZ J., PLOTKIN A.: Low-Speed Aerodynamics, From Wing Theory to Panel Methods, McGraw-Hill, Inc., New York 1991
- HESS J.L., SMITH A.M.O.: Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies, Progress in Aeronautical Sciences, Vol.8, (Ed. D.Küchemann), Pergamon Press, Oxford, 1967, pp.1-138

Metody numeryczne - zastosowania

- projekt koncepcyjny
  - analiza trendów (aproksymacja, interpolacja, ekstrapolacja)
  - wstępne wymiarowanie masy – metody iteracyjne, metoda Newtona-Raphsona
  - obliczenia aerodynamiczne – interpolacja, równania liniowe

Metody numeryczne - zastosowania

- projekt wstępny
  - opis geometrii (pakiety typu CAD)
  - analiza aerodynamiki (metody panelowe)
  - analiza masowa i obciążeń
  - obliczenia wytrzymałościowe

Metody numeryczne - zastosowania

- projekt finalny
  - obliczenia aerodynamiki (kod Eulera, NS), optymalizacja kształtu
  - analiza obciążeń i wytrzymałości (ANSYS)
  - analiza aeroelastyczna (NASTRAN)

Metoda panelowa

Rozwój metod numerycznych oraz duże zwiększenie mocy obliczeniowej komputerów spowodowały, że w obliczeniach opływu ciał coraz częściej sięga się po modele Eulera (nielepki) a nawet Naviera-Stokesa (lepki). Mogłoby się wydawać, że modele potencjalne przeżyły się. Jednak, pomimo wielu uproszczeń w porównaniu z modelem płynu lepkiego są nadal bardzo atrakcyjnym narzędziem. W wielu zagadnieniach bowiem, niskie koszty obliczeń przy użyciu metod bazujących na modelach potencjalnych rekompensują ich mniejszą dokładność. Bywa również tak, że rezultaty obliczeń metodami potencjalnymi bywają lepsze niż przy użyciu modeli „pełniejszych” - "metoda VLM jest bardzo dobrze zgodna z danymi doświadczalnymi z powodu faktu, że pomija jednocześnie efekty grubości płata i lepkości przepływu. W większości przypadków efekt lepkości wyrównuje straty spowodowane grubością, dość przypadkowo dając dobrą zgodność z wynikami eksperymentu." (cit. Margason)

Model fizyczny

- Najistotniejszymi założeniami poczynionymi przy budowie modelu fizycznego opływu są: nielepkość płynu oraz bezwirowość (za wyjątkiem śladu wirowego) opływu.
- Wpływ lepkości jest symulowany przez warunek Kutty-Żukowskiego, który można interpretować jako zerowanie cyrkulacji na krawędzi spływu branej na jednostkę długości.

Model matematyczny

Model matematyczny stanowią następujące równania :
- równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0 \qquad (1)$$

- równanie Eulera

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \operatorname{grad}) V = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \qquad (2)$$

- równanie stanu

$$p = p_{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_{\infty}}\right)^{\kappa} \qquad (3)$$

Model matematyczny

Z faktu bezwirowości (rot **V** = 0) wynika, że istnieje funkcja skalarna, zwana potencjałem prędkości taka, że :

$$\text{grad}\ \Phi(x,y,z,t) = \mathbf{V} \tag{4}$$

Jeżeli przyjmiemy dodatkowo, że $\mathbf{\Phi = \Phi_\infty + \varphi}$ oraz, że:

$\mathbf{mod\ \nabla\varphi << U_\infty}$, $\mathbf{mod\ \nabla\varphi << a_\infty}$ oraz $\mathbf{mod\ \nabla\varphi << (U_\infty - a_\infty)}$

to otrzymamy:

$$\frac{1}{a_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \varphi = \nabla\varphi \tag{5}$$

przyjmując dodatkowo, że przepływ jest ustalony oraz nieściśliwy otrzymujemy:

$$\nabla\varphi = 0 \tag{6}$$

Metody obliczeniowe

- Metoda obliczeniowa silnie zależy od sposobu modelowania bryły samolotu. Model fizyczny zdefiniowany wcześniej dotyczył jedynie opływu i pomijał opływany obiekt. Zasadniczo stosuje się dwa podejścia. Obiekt modeluje się przy pomocy cienkich powierzchni lub traktuje się samolot jako bryłę trójwymiarową. W obu przypadkach powierzchnia jest dzielona na czworokątne (lub trójkątne) płaskie panele. Przyjmuje się, że ślad wirowy jest płaski i ciągnie się równolegle do prędkości niezaburzonej lub cięciwy (ostrza). Dalej przedstawiona dwie metody:
  - metody siatki wirowej (VLM - Vortex Lattice Method) - cienkie powierzchnie;
  - metody panelowej niskiego rzędu bazującej na rozwiązaniu wewnętrznego zagadnienia Dirichleta - obiekty trójwymiarowe (metoda Hessa);
  - należy dodać, że istnieją też metody mieszane - powierzchnie nośne cienkie; kadłub, gondole trójwymiarowe.

Metoda VLM

Równanie Laplace`a w postaci (6) jest spełnione przez kilka różnych rozwiązań podstawowych. Jednym z rozwiązań podstawowych jest wir, o potencjale prędkości:

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\tan^{-1}\frac{z-z_0}{x-x_0} \tag{7}$$

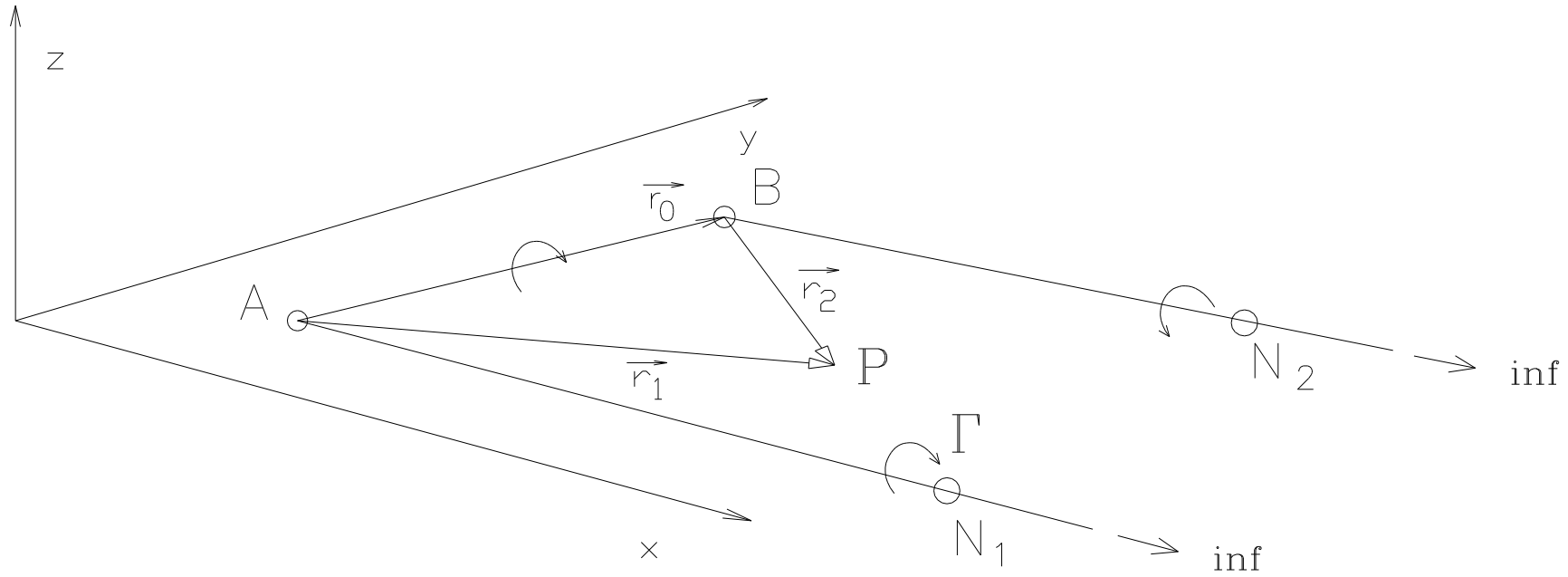
umieszczony w punkcie x_0,y_0 o cyrkulacji Γ. Rozmieszczenie odpowiednio dobranych wirów dyskretnych na powierzchni nośnej i na śladzie umożliwia symulację pola prędkości przepływu, odpowiadającego przepływowi rzeczywistemu. W celu obliczenia prędkości indukowanych przez wiry dyskretne zastosowano prawo Biota-Savarta w postaci:

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma(d\vec{l}\times\vec{r})}{4\pi r^3} \tag{8}$$

gdzie włókno wirowe o długości dl ma cyrkulację Γ, na razie nieznaną.

Metoda VLM

W metodzie VLM wykorzystano wiry podkowiaste składające się z wiru związanego, o skończonej długości i dwóch wirów swobodnych, półnieskończonych. Na rys.1 wir związany oznaczono symbolem $AB = \vec{r}_0$, wiry swobodne oznaczono symbolami AN_1 oraz BN_2



Rys.1

Metoda VLM

Prędkość indukowana przez włókno wirowe $\vec{AB}$ w punkcie P może być obliczona następująco:

$$V_{AB} = \frac{\Gamma}{4\pi r_p} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \sin\Theta d\Theta \tag{9}$$

gdzie Θ oznaczono kąt pomiędzy wektorem $\vec{AB}$ i punkt P, natomiast r_p jest odległością punktu P od odcinka $\vec{AB}$. Prędkość V_{AB} przedstawiona wzorem (9) może być doprowadzona do postaci

$$\vec{V}_{AB} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right|^2} \left[\vec{r}_0 \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1} - \frac{\vec{r}_2}{r_2}\right)\right] = \frac{\Gamma}{4\pi} \{Fac1_{AB}\}\{Fac2_{AB}\} \tag{10}$$

gdzie $\{Fac1_{AB}\}$ jest wektorem zależnym od współrzędnych punktów A,B,P zaś $\{Fac2_{AB}\}$jest skalarem również zależnym od współrzędnych punktów A,B,P. Prędkość indukowana w punkcie P przez wir podkowiasty N_1ABN_2 jest równa sumie:

$$\vec{V} = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{AN_1} + \vec{V}_{BN_2} \tag{11}$$

gdzie prędkości $\vec{V}_{AN_1}$, $\vec{V}_{BN_2}$ otrzymano ze wzorów analogicznych do (10).

Metoda VLM

Całkowita prędkość indukowana przez n-ty wir podkowiasty obliczona w m-tym punkcie kontrolnym na płacie nośnym wynosi:

$$\vec{V}_{m,n} = \vec{C}_{m,n}\Gamma_n \tag{13}$$

gdzie:

$$\vec{C}_{m,n} = \frac{\Gamma}{4\pi}[\{Fac1_{AB}\}\{Fac2_{AB}\} + \{Fac1_{AN_1}\}\{Fac2_{AN_1}\} + \{Fac1_{BN_2}\}\{Fac2_{BN_2}\}]_{m,n} \tag{14}$$

Prędkość indukowana przez wiry podkowiaste, w m-tym punkcie kontrolnym jest równa:

$$\vec{V}_m = \sum_n \vec{C}_{m,n}\Gamma_n \tag{15}$$

Metoda VLM

Równanie (15) może być rozwiązane względem zbioru Γ_n dla zadanych prędkości indukowanych $\vec{V}_m$. Dla płatów nieskręconych o niezbyt dużej krzywiźnie szkieletowej współrzędne prędkości $\vec{V}_m$ mogą być obliczone następująco:

$$\vec{V}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ -U_\infty \left(\alpha - \left(\frac{dz}{dx} \right)_m \right) tg\phi_m \\ -U_\infty \left(\alpha - \left(\frac{dz}{dx} \right)_m \right) \end{bmatrix} \tag{16}$$

gdzie α jest kątem natarcia, zaś z(x) przedstawia równanie szkieletowej. Kąt ϕ_m jest lokalnym kątem wzniosu. Po wyznaczeniu zbioru cyrkulacji $\{\Gamma_n\}$ siła nośna na jednostkę rozpiętości panelu może być obliczona ze wzoru Żukowskiego w postaci:

$$\Delta l_n = \rho_\infty U_\infty \Gamma_n \tag{17}$$

Metoda VLM

Całkowita siła nośna płata może być obliczona następująco:

$$L = \sum_n \rho_\infty U_\infty \Delta y_n \Gamma_n \tag{18}$$

Współczynnik siły nośnej wynosi odpowiednio:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty S} = \frac{2\sum_n \Delta y_n \Gamma_n}{U_\infty \sum_n \Delta x_n \Delta y_n} \tag{19}$$

Podobnie możemy obliczyć współczynnik momentu pochylającego:

$$C_m = \frac{M_A}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty S C_a} = \frac{2\sum_n \Delta y_n x_n \Gamma_n}{C_a\, U_\infty \sum_n \Delta x_n \Delta y_n} \tag{20}$$

gdzie C_a jest średnią cięciwą aerodynamiczną płata.

Metoda VLM

- Istniejące pakiety:
  - Tornado – KTH (Szwecja)
  - VLAERO – AMI (USA)
  - VORTR – PW (Polska)
  - ...

Metoda Hessa

Podstawą metody jest rozwiązanie równania Laplace`a dla pełnego potencjału prędkości:

$$\nabla\Phi = 0 \tag{21}$$

które może przyjąć postać:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{samolot\ +\ ślad} \mu \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right) dS - \frac{1}{4\pi}\int_{samolot} \sigma \frac{1}{r} dS + \Phi_\infty \tag{22}$$

Przyjmujemy następujące warunki brzegowe:
- wewnętrzny Dirichleta na powierzchni opływanej bryły:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{samolot\ +\ ślad} \mu \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right) dS - \frac{1}{4\pi}\int_{samolot} \sigma \frac{1}{r} dS = 0 \tag{23}$$

gdzie:

natężenie dipola: $\mu = -(\Phi - \Phi_i)$; (24)

natężenie źródła $\sigma = \partial\mu/\partial \boldsymbol{n}$. (25)

Metoda Hessa

-Kutty-Żukowskiego na krawędzi spływu (ostrze):

$$\Delta p(x,y)_{TE} = 0 \tag{26}$$

-na śladzie wirowym:

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial \boldsymbol{x}} = 0 \tag{27}$$

Zakładamy, że potencjał prędkości wewnątrz opływanej bryły $\boldsymbol{\Phi_i}$ jest równy potencjałowi w nieskończoności $\boldsymbol{\Phi_\infty}$

Metoda Hessa

Otrzymujemy równanie całkowe w postaci (23), które możemy aproksymować układem równań liniowych, w których niewiadomymi są natężenia dipoli μ (stałe na panelu):

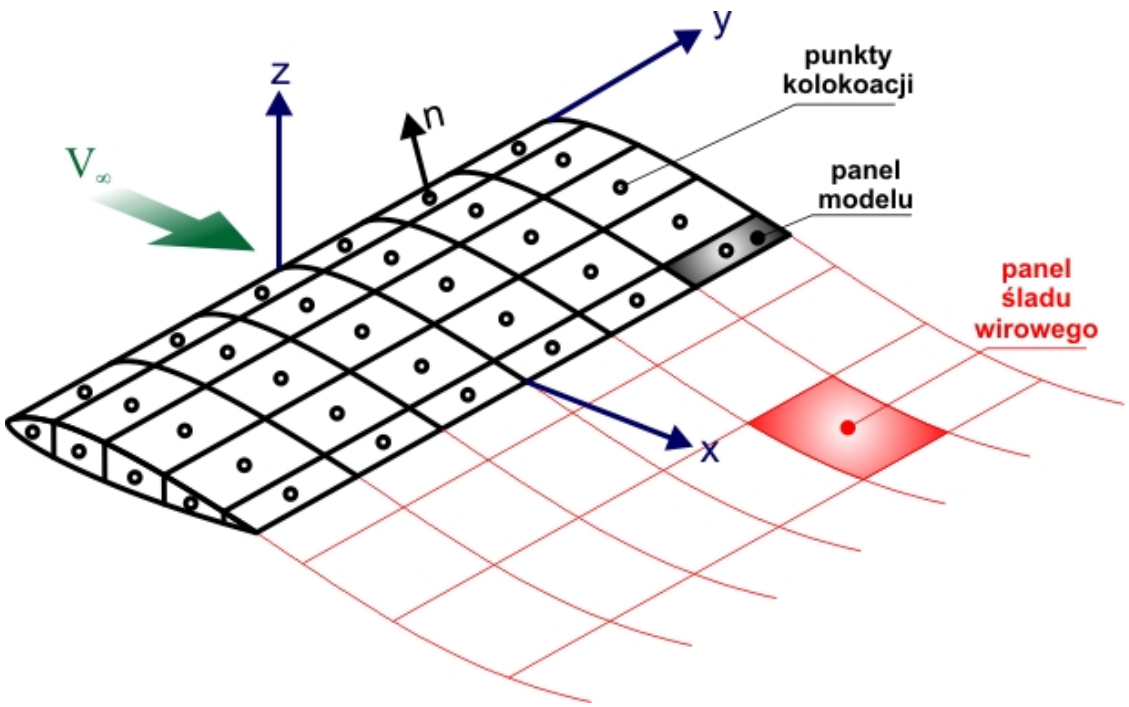
$$\sum_{k=1}^{N} C_k \mu_k + \sum_{l=1}^{N_w} C_l \mu_l + \sum_{k=1}^{N} B_k \sigma_k = 0 \qquad (28)$$

gdzie C_k , C_l i B_k to aerodynamiczne współczynniki wpływu :

$$C_k = \frac{1}{4\pi} \int_{\boldsymbol{S_{1234}}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \left(\frac{1}{r_k} \right) dS_k \; ; \qquad B_k = -\frac{1}{4\pi} \int_{\boldsymbol{S_{1234}}} \frac{1}{r_k} dS_k \; ; \qquad (29)$$

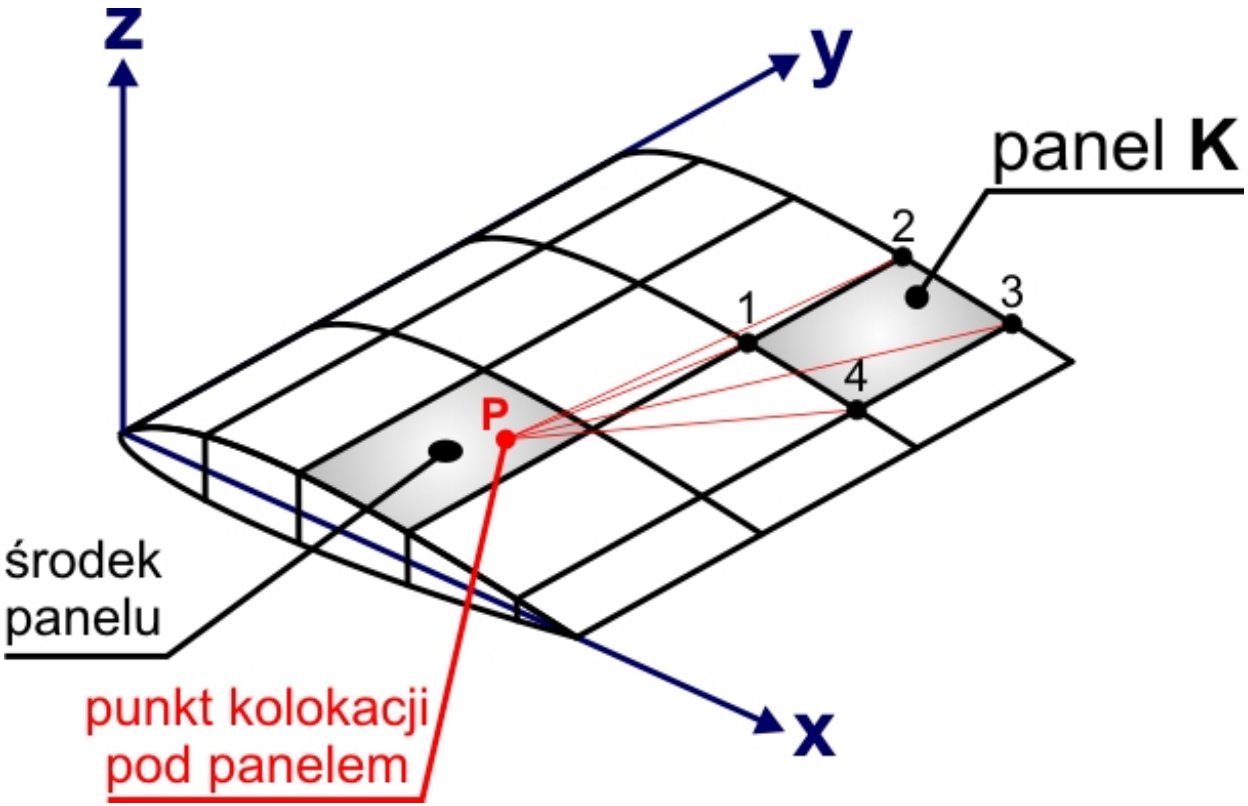
N - liczba paneli na bryle samolotu;
N_w - liczba paneli na śladzie;
$\boldsymbol{S_{1234}}$ - powierzchnia k-tego panelu.

Metoda Hessa



Aproksymacja powierzchni bryły samolotu układem paneli

Metoda Hessa



Wpływ panelu K w punkcie P

Metoda Hessa

Układ równań (28) wymaga jeszcze wyznaczenia natężenia źródłowości σ (stałego na panelu), którą (wykorzystując związki (24) i (25) oraz warunek, że na brzegu obszaru zamkniętego mamy $\partial\Phi_i/\partial \boldsymbol{n}=0$) możemy zdefiniować następująco:

$$\sigma = -\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{V}_{\infty} \tag{30}$$

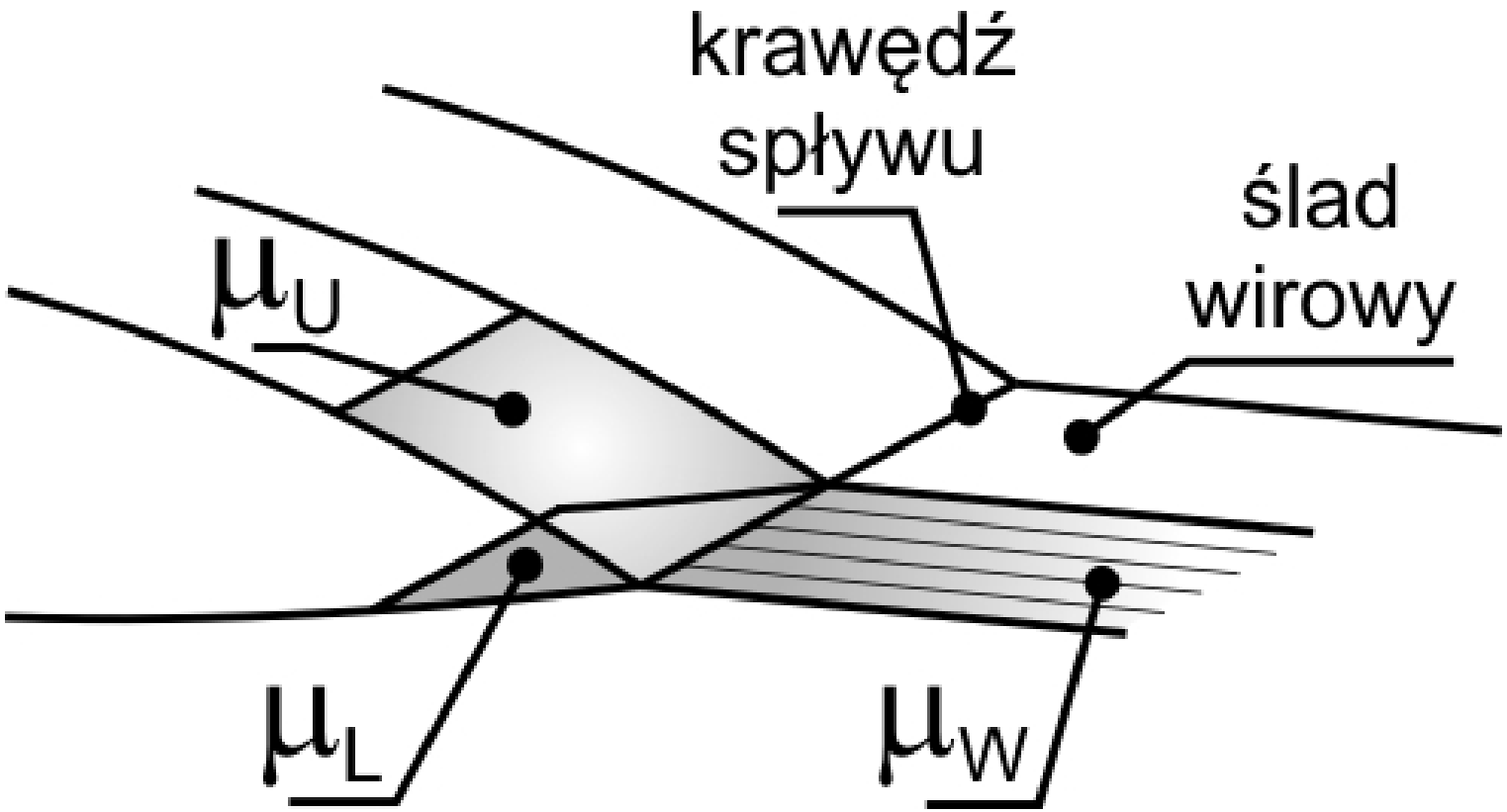
Aby zamknąć układ równań należy powiązać niewiadome natężenia dipoli na śladzie wirowym z natężeniami dipoli na panelach bryły samolotu. W tym celu wykorzystano warunek Kutty-Żukowskiego mówiący, że cyrkulacja na jednostkę długości (wzdłuż y) na krawędzi spływu jest równa zeru, oraz fakt, że natężenie dipola na jednostkę długości (wzdłuż y) jest równe cyrkulacji ze znakiem ujemnym. W wyniku otrzymamy:

$$\mu_{TE} = \mu_W = \text{const} \tag{31}$$

Natężenie dipoli na krawędzi spływu jest równe różnicy pomiędzy natężeniami dipoli na górnej i dolnej powierzchni, w pobliżu krawędzi spływu. Wykorzystując związek (31), natężenie dipoli na śladzie można wyznaczyć z zależności:

$$\mu_W = \mu_U - \mu_L \tag{32}$$

Metoda Hessa



Związek między natężeniami dipoli na krawędzi spływu i śladzie wirowym

Metoda Hessa

Rozwiązanie układu (28) daje rozkład potencjału na powierzchni opływanej bryły. Aby otrzymać rozkład ciśnienia, potrzebny do wyznaczenia globalnych charakterystyk, należy wyznaczyć rozkład prędkości opływu różniczkując potencjał prędkości względem przyjętych współrzędnych. Następnie korzystając z twierdzenia Bernouli`ego można obliczyć ciśnienie. Różniczkowanie numeryczne potencjału jest jednak w ogólnym przypadku dosyć kłopotliwe i może być źródłem wielu błędów, zwłaszcza w miejscach dużej nieregularności siatki, np. na załamaniach krawędzi natarcia.

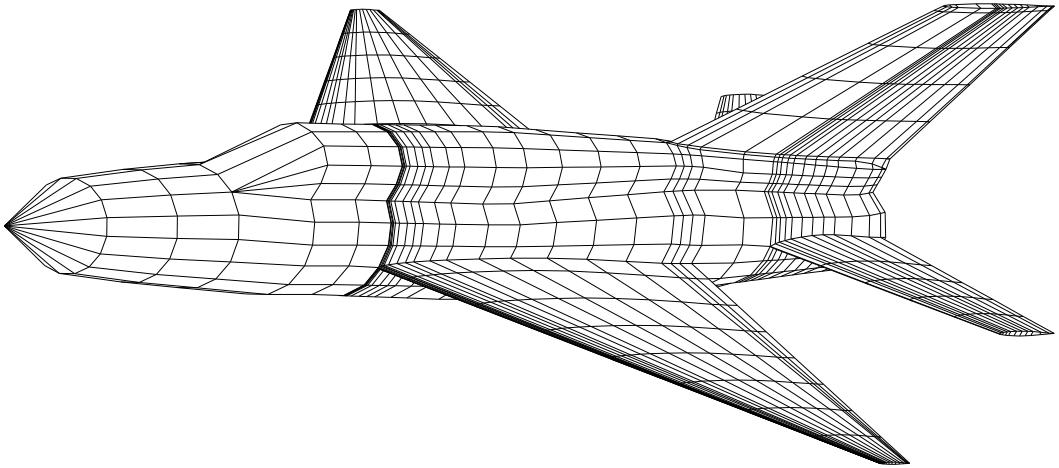
Obciążenia aerodynamiczne wyznaczamy zgodnie z następującymi zależnościami:
- siłę nośną

$$P_z = -\sum_{i=1}^{N} p_i S_i \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{z} \qquad (33)$$

- moment pochylający

$$M_y = \sum_{i=1}^{N} p_i S_i x_i \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{z} + \sum_{i=1}^{N} p_i S_i z_i \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{x} \qquad (34)$$

Metoda panelowa - wyniki



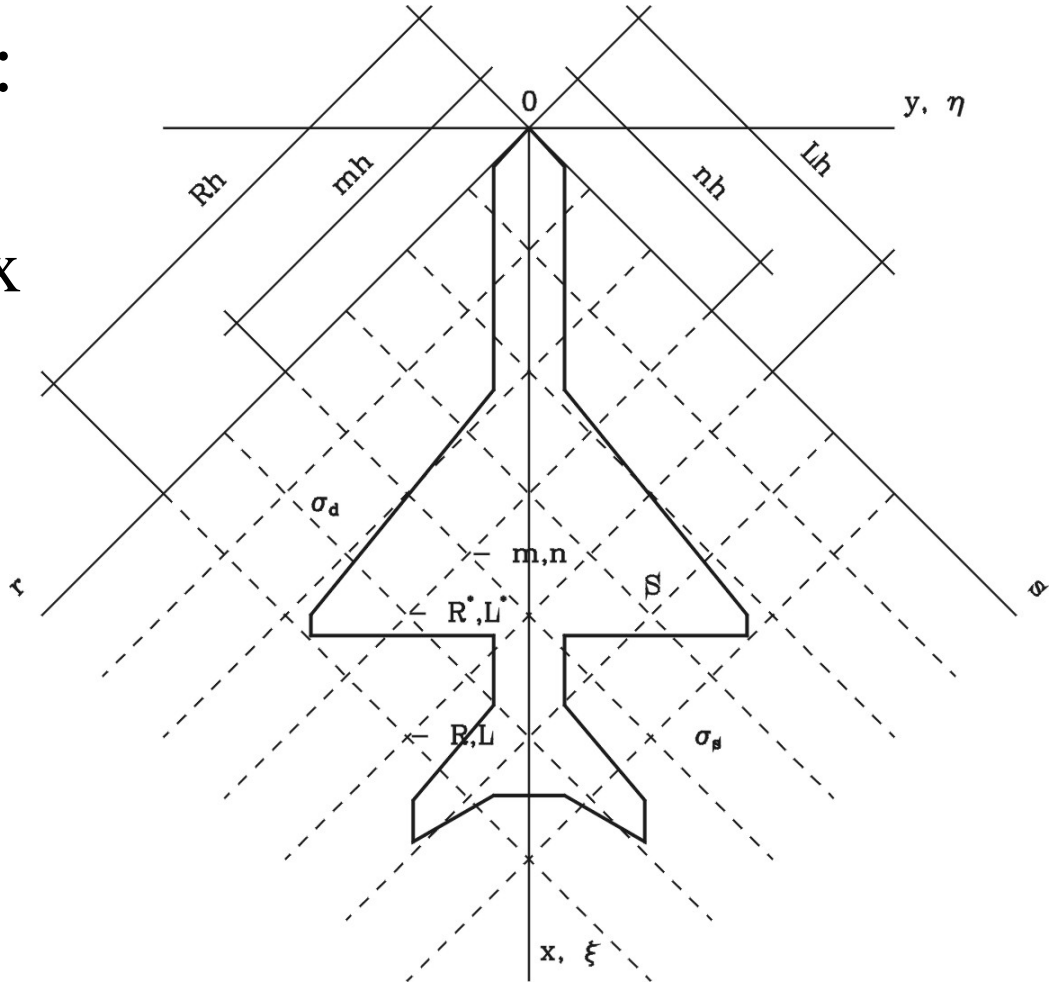
Stability derivatives of MiG-21, angle of attack Alfa=10°			
derivative	DATA SHEETS	PRESENT METHOD	FLIGHT TEST
czw	-2.36	-2.7	-2.58
cmq	-1.34	-1.14	-1.68
cyv	-0.795	-0.617	-0.67
clv	-0.219	-0.103	-0.0973
clp	-0.122	-0.0988	-0.225
cnv	0.371	0.168	0.19
cnp	-0.0123	-0.0215	0.0194
cnr	-0.293	-0.278	-0.366

Metoda panelowa

- Istniejące pakiety:
  - PANUKL - ☺
  - VSAERO – AMI (USA)
  - SUMO – (KTH) Szwecja
  - ...

Metody naddźwiękowe

- Metody „cienkie”:
  - Mach Box
  - Characteristic Box
- Trzy obszary całkowania:
  - Diafragma
  - Samolot
  - Ślad wirowy



Pudełka Macha

Równanie Prandtla-Glauerta (1) stanowi model matematyczny opływu:

$$(Ma^2 - 1)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

Po zdefiniowaniu odpowiednich warunków brzegowych [3], otrzymamy rozwiązanie równania (1) w postaci [4]:

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{S(x,y,z)} \frac{w(\xi,\eta)d\xi d\eta}{R} \qquad (2)$$

gdzie:

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}|_{z=0}, R = \sqrt{(x-\xi)^2 - \beta[(y-\eta)^2 + z^2]} \qquad (3)$$

Metoda obliczeniowa sprowadza się do numerycznego wyznaczenia rozkładu potencjału z równania (2), a następnie rozkładu ciśnień dla różnych warunków lotu (lot ustalony, lot ze stałą prędkością kątową pochylania itp.). Z tak wyznaczonego rozkładu w wyniku całkowania po powierzchni otrzymujemy globalne charakterystyki aerodynamiczne.