



OMNIS

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

Optymalizacja w inżynierii lotniczej i kosmicznej

Wykład 2 Matematyczne podstawy optymalizacji 1

1130-LK000-MSP-1037



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



- Podstawowe pojęcia – repetytorium
- Optymalizacja numeryczna – za i przeciw
- Przykład funkcji dwóch zmiennych bez więzów
- Przykład zagadnienia z więzami
- Iteracyjna procedura optymalizacji bez więzów
- Iteracyjna procedura optymalizacji z więzami



OMNIS

Poszukiwanie minimum lub maksimum

- Funkcja celu (*objective function*) jest matematycznym zapisem kryterium optymalizacyjnego. Poszukujemy zwykle minimum tej funkcji. Zmienne funkcji celu są zmiennymi decyzyjnymi (projektowymi).
- Aby konstrukcja była akceptowalna musi spełniać pewien zbiór wymagań (ograniczeń) zwany więzami (*constraints*).
Oznacza to wtedy, że poszukujemy ograniczonego minimum lub maksimum funkcji celu;
- Przykład: konstruujemy komorę spalania silnika tłokowego.
Funkcją celu jest sprawność spalania. Silnik powinien dostarczać moc na wale przy ograniczonej emisji spalin. Wymaganie mocy minimalnej i maksymalnej emisji definiują więzy konstrukcji;





OMNIS

Za i przeciw optymalizacji numerycznej

Możliwe podejście: przetestować eksperymentalnie wiele zbudowanych silników (ad. przykładu z poprzedniego slajdu). Jest kosztowny sposób bez gwarancji znalezienia rzeczywistego optimum. Inne podejście polega na opisie matematycznym procesu konstruowania i zastosowaniu rachunku różniczkowego do znalezienia optimum. I choć to podejście wydaje się bardzo atrakcyjne, to niestety rzadko kiedy udaje się otrzymać pełny opis matematyczny zjawiska i następnie dokonać odpowiednich różniczkowań;





OMNIS

Komputerowe przeszukiwanie wariantów konstrukcyjnych

- Komputerowe przeszukiwanie może być atrakcyjne, jeśli czas pracy komputera nie jest zbyt długi;
- Przykład – problem konstrukcyjny opisany za pomocą 3 zmiennych, każda zmienna przyjmuje 10 różnych wartości. Niech jeden przypadek obliczeniowy zajmie 1/10 sekundy centralnego procesora (CPU). 103 kombinacji obliczeniowych zajmie 100 sekund CPU. Jeżeli natomiast problem zależy od 12 zmiennych, to czas obliczeń zajmie 10^{11} sekund CPU, czyli około 3200 lat pracy komputera;





OMNIS

Programowanie matematyczne

- Metody optymalizacji numerycznej są nazywane technikami programowania matematycznego. Obejmują programowanie liniowe, kwadratowe, dynamiczne oraz geometryczne;
- Historia programowania liniowego jest względnie nowa, ma około 70 lat. Autorzy wielu algorytmów mogą zademonstrować przykłady efektywności, dobrej zbieżności swoich algorytmów na specjalnie dobranych przykładach. Wielu użytkowników dopiero po zainwestowaniu czasu i wielu próbach dochodzi do wniosku, że dany algorytm jest nieużyteczny. Istnieje więc potrzeba sformułowania uogólnionej koncepcji optymalizacji i dostosowania jej do praktycznych zadań inżynierskich;





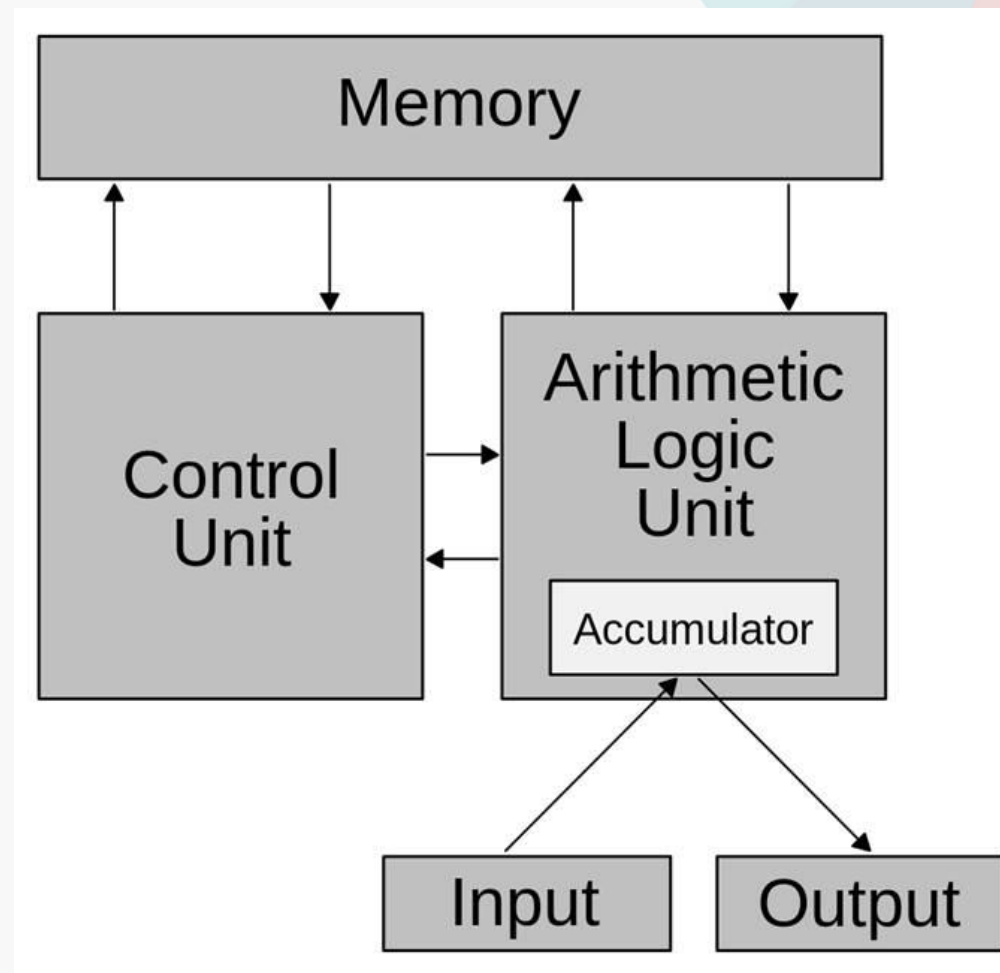
OMNIS

Użycie komputera - architektura von Neumanna

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

Architektura von Neumanna: pierwszy rodzaj architektury komputera, opracowanej przez Johna von Neumanna, Johna W. Mauchly'ego oraz Johna Presper Eckerta w 1945 roku. Cechą charakterystyczną tej architektury jest to, że dane przechowywane są wspólnie z instrukcjami, co sprawia, że są kodowane w ten sam sposób.

W architekturze tej komputer składa się z czterech głównych komponentów



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską

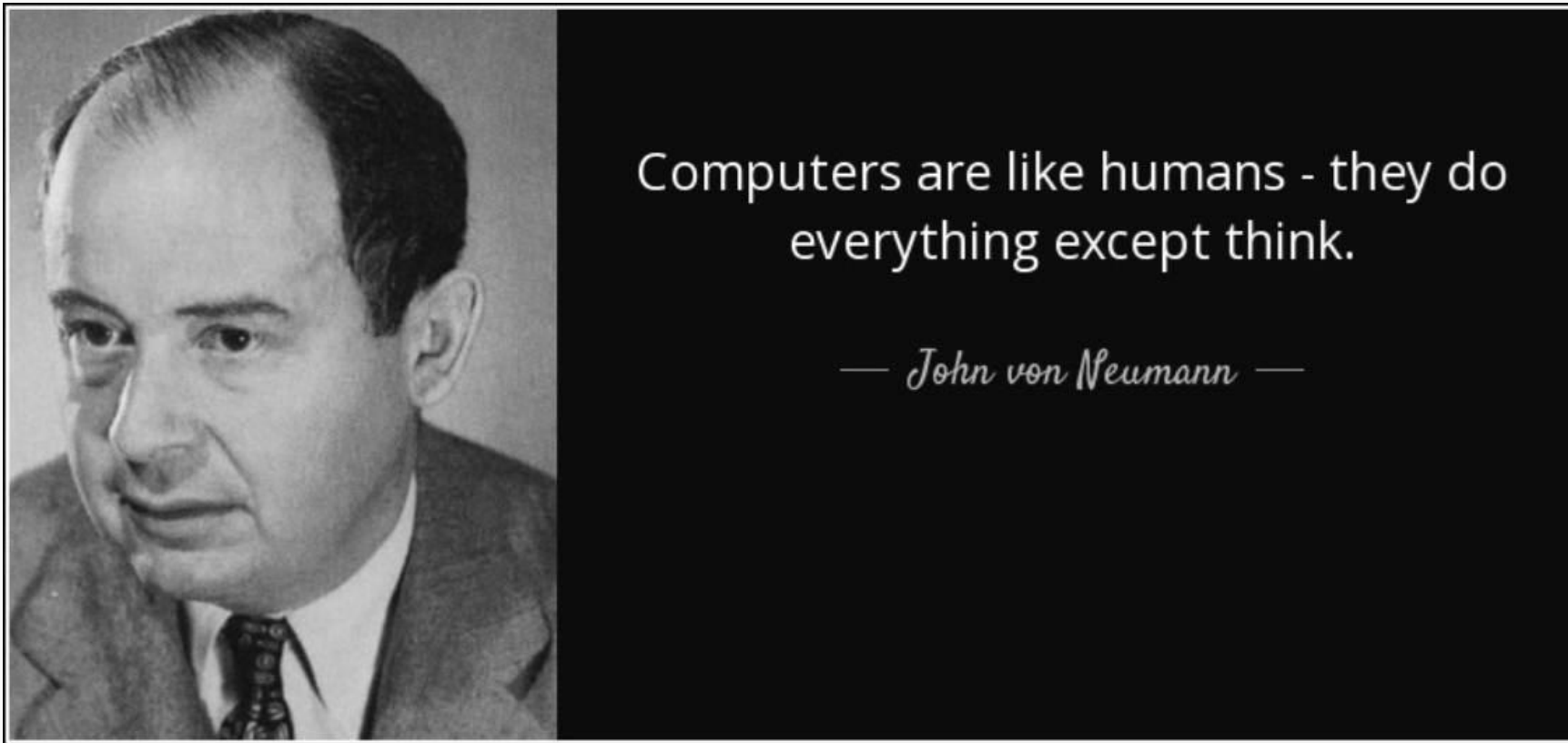


Politechnika Warszawska



OMNIS Użycie komputera - John von Neumann

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



OMNIS

Koncepcje optymalizacji minimalizacja funkcji przy braku więzów (1/2)

Założmy, że poszukujemy minimum funkcji dwóch zmiennych:

$$F(\mathbf{X}) = 10 X_1^4 - 20 X_1^2 X_2 + 10 X_2^2 + X_1^2 - 2 X_1 + 5$$

gdzie

$F(\mathbf{X})$ – funkcja celu (brak nałożonych ograniczeń);

$\mathbf{X}$ – wektor zmiennych decyzyjnych.

Warunkiem istnienia minimum jest zerowanie się pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial X_1} = 40 X_1^3 - 40 X_1 X_2 + 2 X_1 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial X_2} = -20 X_1^2 + 20 X_2 = 0$$

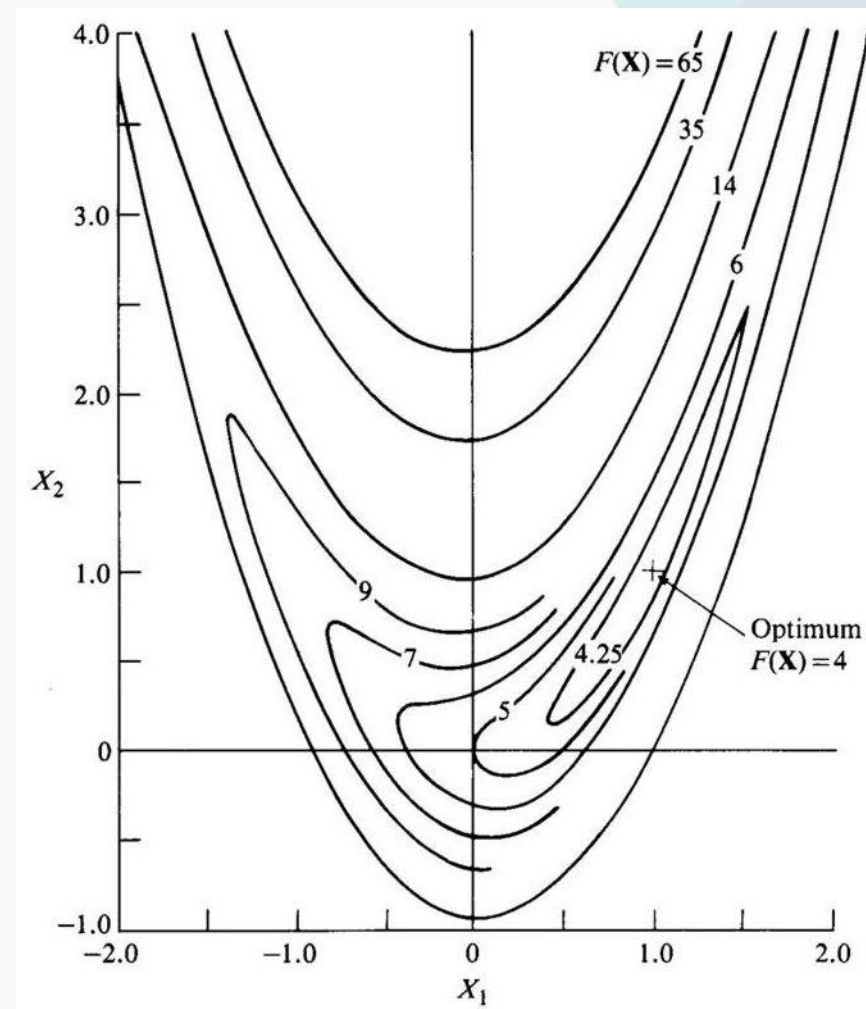
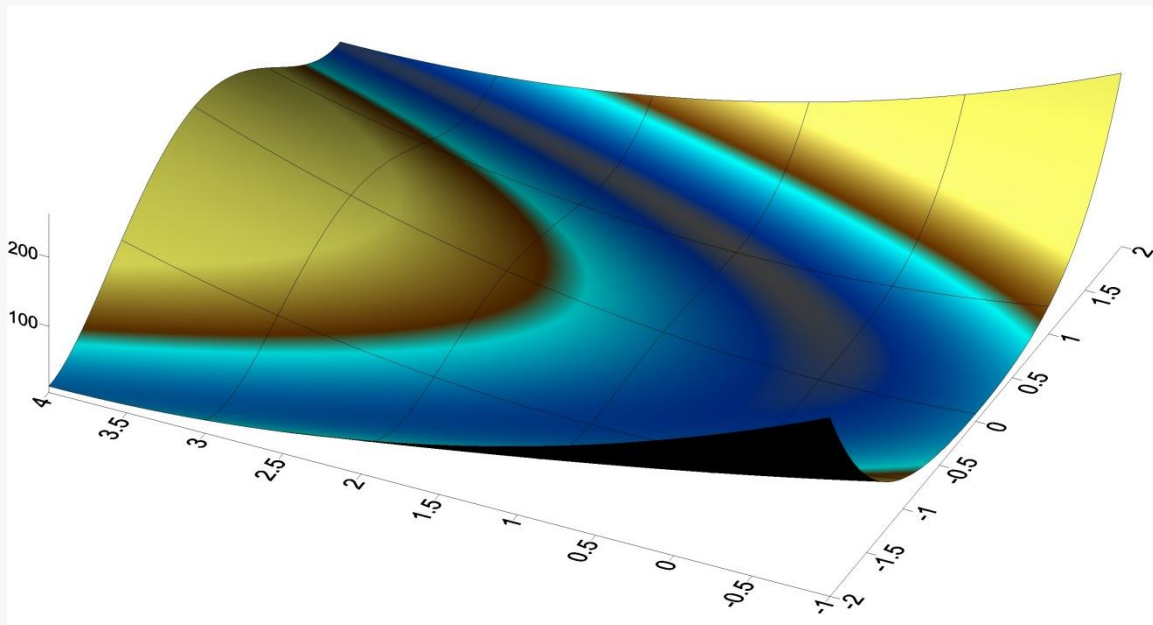


OMNIS

Koncepcje optymalizacji minimalizacja funkcji przy braku więzów (2/2)

Rozwiązanie:

$$X_1^* = X_2^* = 1 ; F(\mathbf{X}) = 4$$

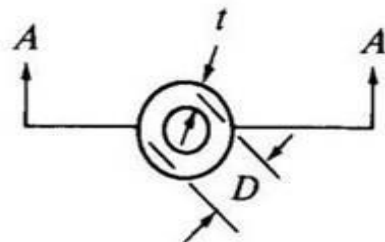


$$F(\mathbf{X}) = 10 X_1^4 - 20 X_1^2 X_2 + 10 X_2^2 + X_1^2 - 2 X_1 + 5$$

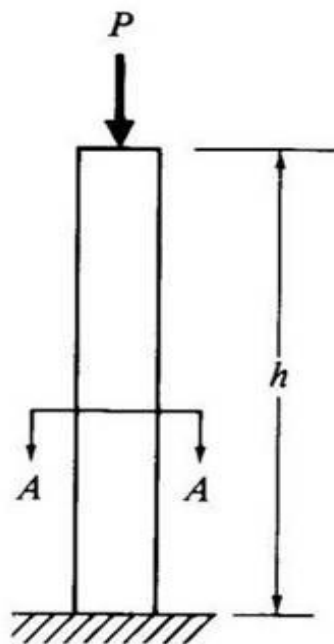


OMNIS

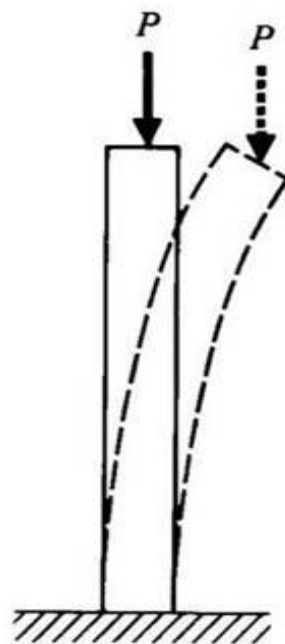
Koncepcje optymalizacji minimalizacja funkcji w obecności więzów (1/5)



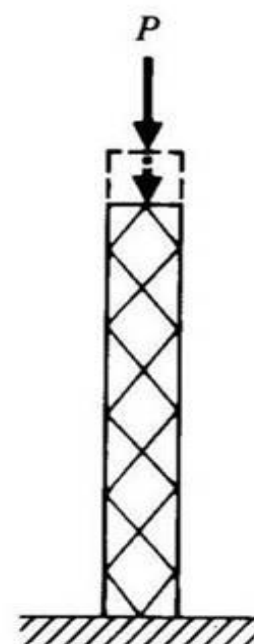
Poszukujemy średnicy D i grubości ścianki t
aby zminimalizować ciężar kolumny obciążonej
siłą ściskającą P



(a) kolumna



(b) wyboczenie Eulera

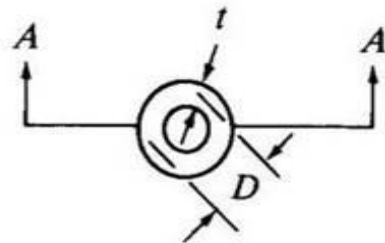


(c) wyboczenie lokalne



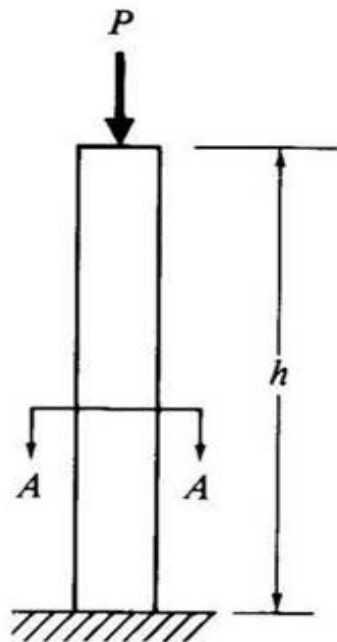
OMNIS

Koncepcje optymalizacji minimalizacja funkcji w obecności więzów (2/5)

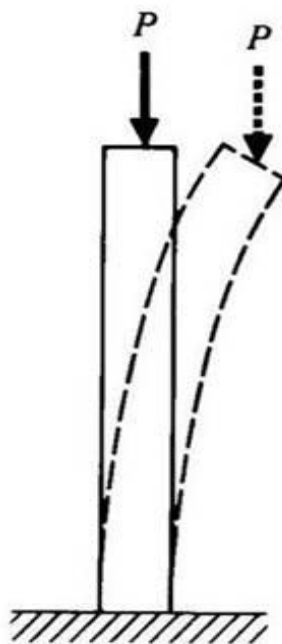


$$W = \rho A h = \rho \pi D t h$$

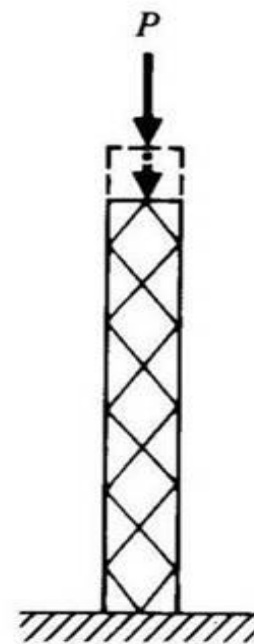
Założenie: ignorujemy obciążenia boczne,
niesymetrię geometryczną i materiałową kolumny



(a) kolumna



(b) wyboczenie Eulera



(c) wyboczenie lokalne



OMNIS

Koncepcje optymalizacji minimalizacja funkcji w obecności więzów (3/5)

Aby uniknąć wyboczenia naprężenia σ nie mogą przekraczać naprężeń dopuszczalnych $\bar{\sigma}$

Ponadto naprężenia nie mogą przekraczać naprężeń, przy których wystąpi wyboczenie Eulerowskie lub lokalne wyboczenie powłoki.

Naprężenia krytyczne Eulerowskie:

$$\sigma_b = \frac{4 \pi^2 E I}{A H^2} = \frac{\pi^2 E (D^2 + t^2)}{2 H^2}$$

Naprężenia krytyczne powodujące wyboczenie powłoki:

$$\sigma_s = \frac{2 E t}{D \sqrt{3(1-\nu^2)}}$$



OMNIS

Koncepcje optymalizacji

minimalizacja funkcji w obecności więzów (4/5)

Warunki ze względu na naprężenia:

$$\sigma \leq \bar{\sigma} \quad ; \quad \sigma \leq \sigma_b \quad ; \quad \sigma \leq \sigma_s$$

Warunki geometryczne:

$$D \geq t \quad ; \quad D \geq 10^{-6} \quad ; \quad t \geq 10^{-6}$$

Funkcja celu:

$$W(D, t) = \rho \pi D t h$$

$$g_1(D, t) = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} - 1 \leq 0 \quad ; \quad g_4(D, t) = t - D \leq 0$$

Więzy konstrukcyjne:

$$g_2(D, t) = \frac{\sigma}{\sigma_b} - 1 \leq 0 \quad ; \quad D \geq 10^{-6}$$

$$g_3(D, t) = \frac{\sigma}{\sigma_s} - 1 \leq 0 \quad ; \quad t \geq 10^{-6}$$



OMNIS

Koncepcje optymalizacji

minimalizacja funkcji w obecności więzów (5/5)

Funkcja celu:

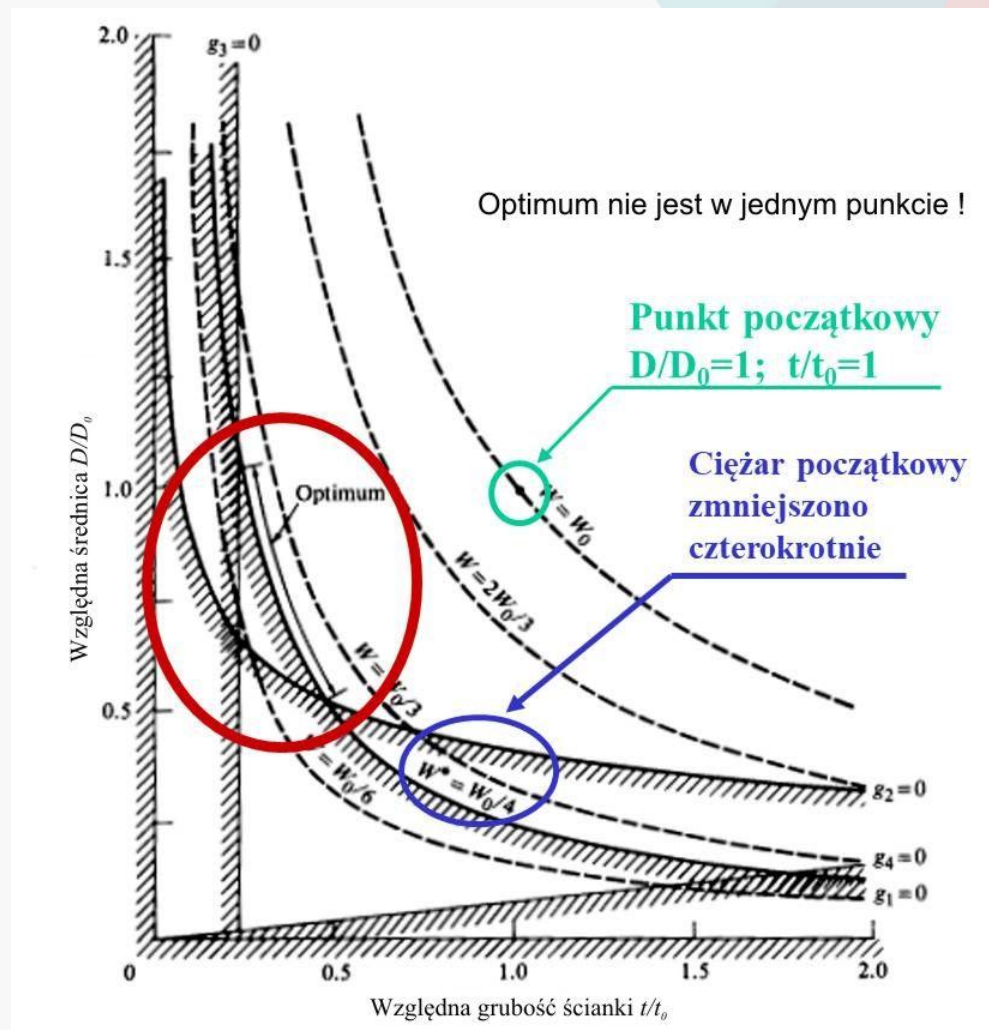
$$W(D, t) = \rho \pi D t h$$

Więzy:

$$g_1(D, t) = \frac{\sigma}{\sigma_l} - 1 \leq 0 ; \quad g_4(D, t) = t - D \leq 0$$

$$g_2(D, t) = \frac{\sigma}{\sigma_b} - 1 \leq 0 ; \quad D \geq 10^{-6}$$

$$g_3(D, t) = \frac{\sigma}{\sigma_s} - 1 \leq 0 ; \quad t \geq 10^{-6}$$





OMNIS

Minimalizacja funkcji w obecności więzów sformułowanie ogólne

Minimalizacja funkcji celu $F(\mathbf{X})$ w obecności więzów:

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0; \quad j=1, m \quad \text{więzy jednostronne}$$

$$h_k(X) = 0; \quad k=1, l \quad \text{więzy dwustronne}$$

$$X_i^l \leq X_i \leq X_i^u; \quad i=1, n \quad \text{więzy obszarowe}$$

gdzie:

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{Bmatrix}$$

zmienne konstrukcyjne

Maksymalizacja funkcji celu może dotyczyć $-F(\mathbf{X})$



OMNIS Iteracyjna procedura optymalizacji (1/4)

Większość procedur optymalizacyjnych wymaga punktu startowego $\mathbf{X}^0$,
poszukiwanie punktu optymalnego odbywa się iteracyjnie według równania:

$$\mathbf{X}^q = \mathbf{X}^{q-1} + \alpha^* \mathbf{S}^q$$

gdzie: q – numer iteracji; $\mathbf{S}$ – wektor poszukiwań; α^* - odległość w kierunku wektora $\mathbf{S}$ którą zamierzamy przebyć w q -tej iteracji

wektor $\mathbf{S}$ może mieć postać:

$$\mathbf{S}^q = -\nabla \mathbf{F}(\mathbf{X}^{q-1})$$



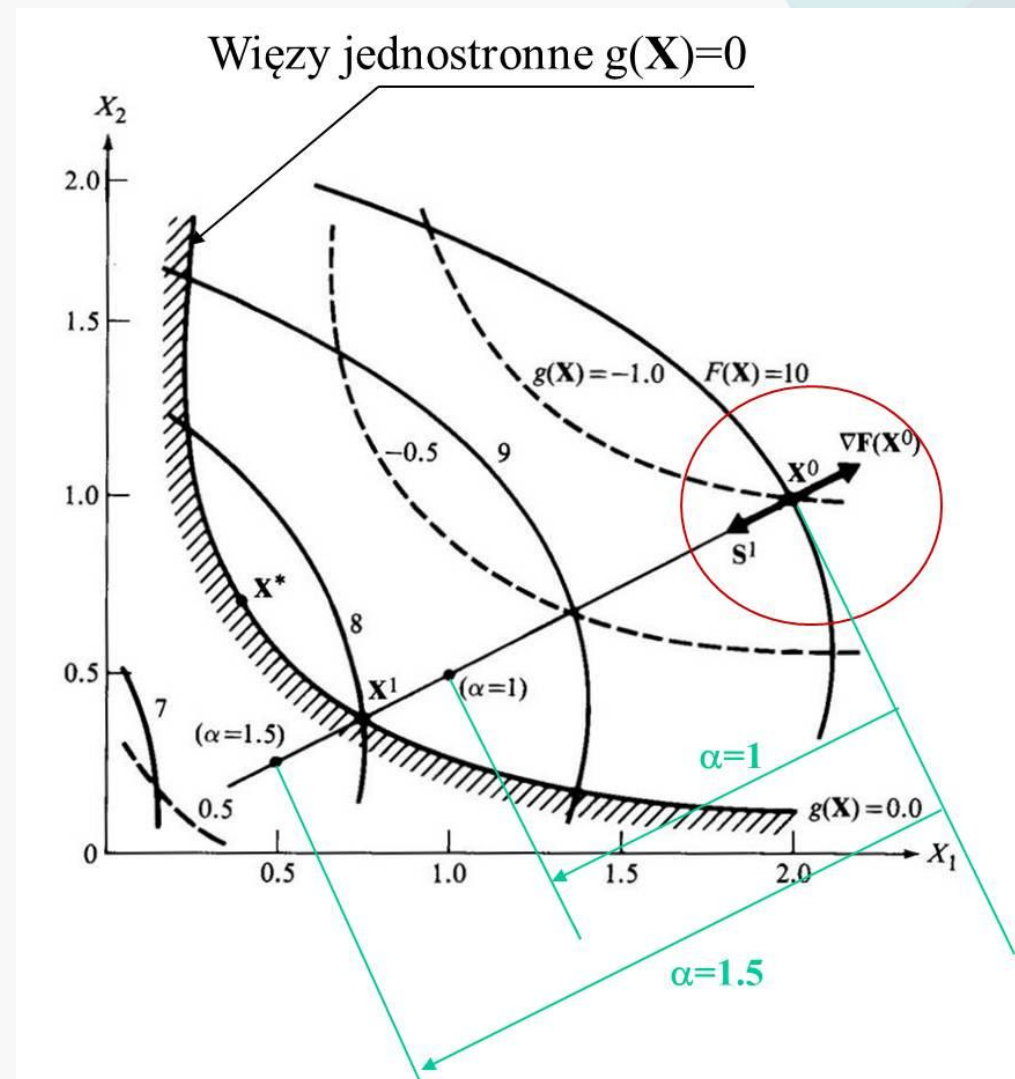
OMNIS Iteracyjna procedura optymalizacji (2/4)

$$\mathbf{S}^q = -\nabla \mathbf{F}(\mathbf{X}^{q-1})$$

Niech $\mathbf{X}^0 = \{2, 1\}$

Niech $\mathbf{S}^1 = \{-1, -0.5\}$

czyli zmierzamy do początku układu współrzędnych





OMNIS

Iteracyjna procedura optymalizacji (3/4)

$$\alpha = 0 \quad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

$$F(\alpha) = 10.0 \quad g(\alpha) = -1.0$$

$$\alpha = 1.0 \quad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix} + 1.0 \begin{Bmatrix} -1.0 \\ -0.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

$$F(\alpha) = 8.4 \quad g(\alpha) = -0.2$$

$$\alpha = 1.5 \quad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix} + 1.5 \begin{Bmatrix} -1.0 \\ -0.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.50 \\ 0.25 \end{Bmatrix}$$

$$F(\alpha) = 7.6 \quad g(\alpha) = 0.2$$

$$\alpha^* = 1.25 \quad \mathbf{X}^* = \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix} + 1.25 \begin{Bmatrix} -1.0 \\ -0.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.750 \\ 0.375 \end{Bmatrix}$$

$$F(\alpha^*) = 8.0 \quad g(\alpha^*) = 0.0$$

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0; \quad j=1, m$$

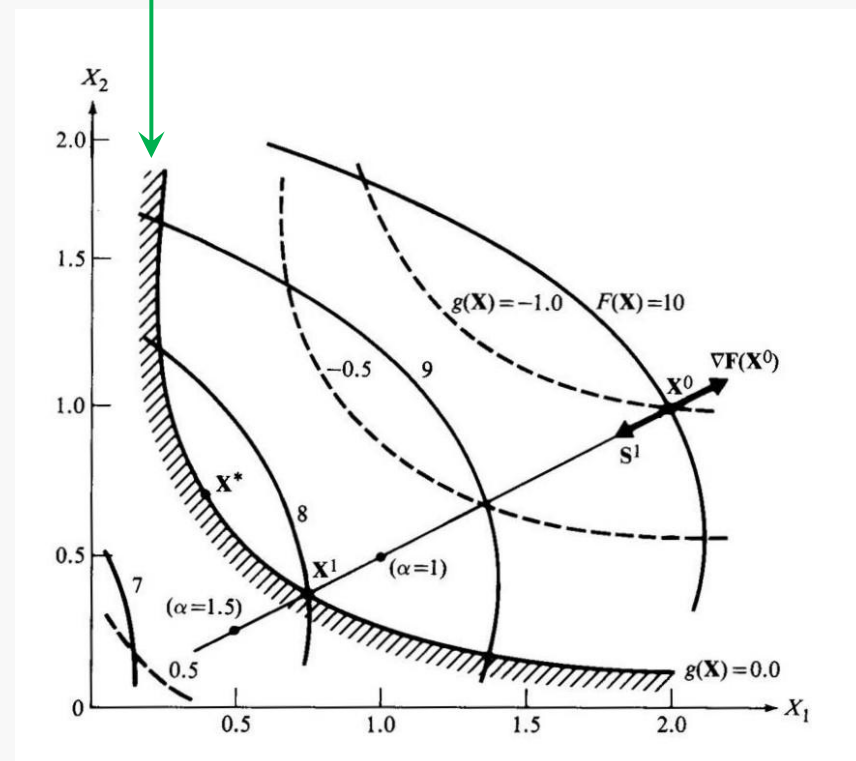
$$h_k(\mathbf{X}) = 0; \quad k=1, l$$

$$X_i^l \leq X_i \leq X_i^u; \quad i=1, n$$

• więzy jednostronne

• więzy dwustronne

• więzy obszarowe



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



OMNIS Iteracyjna procedura optymalizacji (4/4)

Szczegóły jednego kroku iteracyjnego:

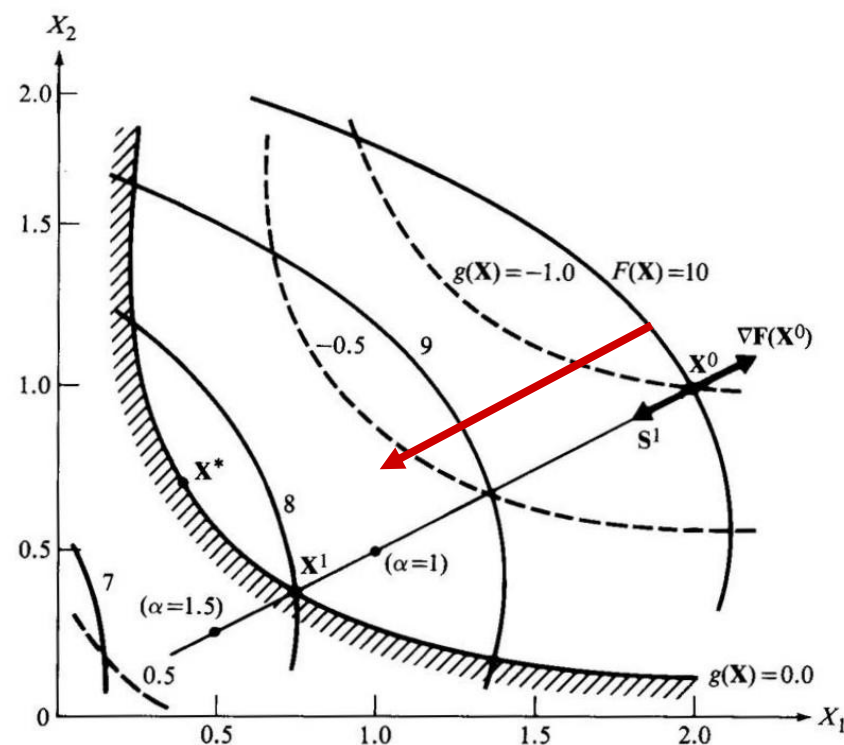
Niech $\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$; $F(\mathbf{X})=10$; $g(\mathbf{X})=-1$

zakładamy $\alpha=1$ i obliczamy nowe $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + 1 \begin{Bmatrix} -1 \\ -0.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

- Przeszukiwanie wielowymiarowe redukujemy do jednowymiarowego!
- Kończymy procedurę, gdy nie obserwujemy dalszego zmniejszania funkcji celu.
- W analizowanym przykładzie $\text{Min } F(\mathbf{X}^*)=7.6$
- Dojście do punktu $\mathbf{X}^*$ wymaga zmiany kierunku poszukiwań $\mathbf{S}$

$$\mathbf{X}^q = \mathbf{X}^{q-1} + \alpha^* \mathbf{S}^q$$





OMNIS

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania optymalnego Warunki konieczne dla funkcji jednej zmiennej

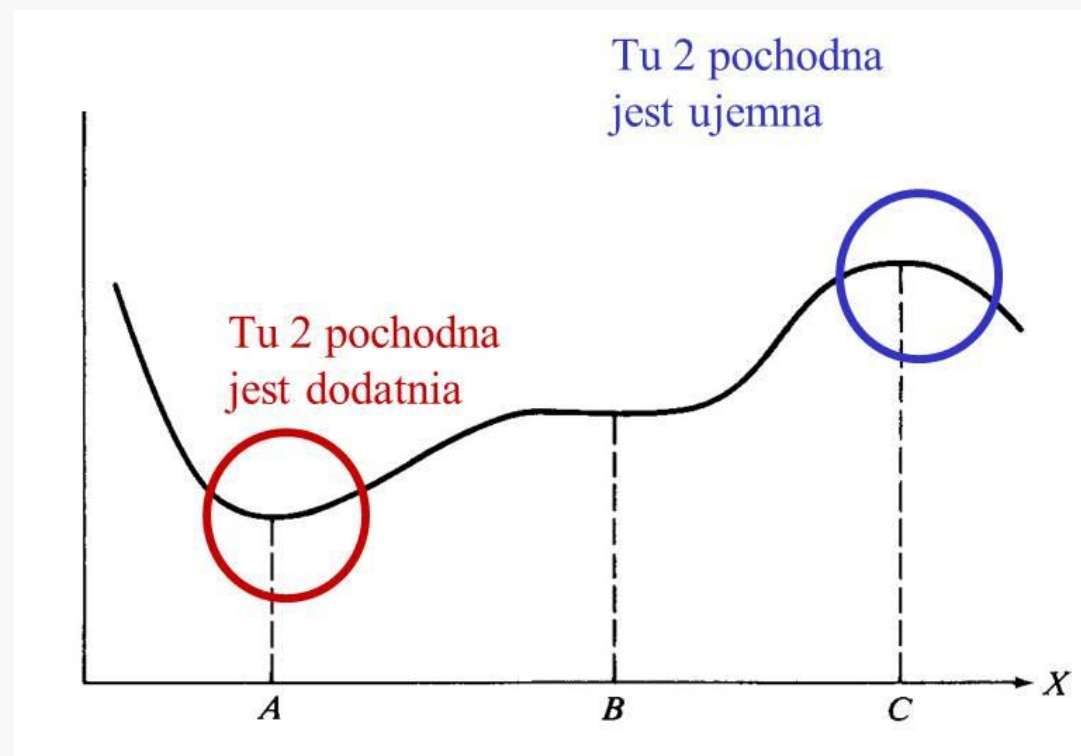
W punkcie, gdzie funkcja wielu zmiennych osiąga minimum gradient $F(\mathbf{X})$ znika, czyli

$$\nabla F(\mathbf{X}) = 0$$

gdzie

$$\nabla F(\mathbf{X}) = \begin{Bmatrix} \partial F(\mathbf{X}) / \partial X_1 \\ \partial F(\mathbf{X}) / \partial X_2 \\ \dots \\ \partial F(\mathbf{X}) / \partial X_n \end{Bmatrix}$$

przy czym jest to warunek konieczny, ale nie dostateczny. Warunkiem dostatecznym istnienia minimum dla funkcji jednej zmiennej jest, aby druga pochodna była dodatnia





OMNIS

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania optymalnego Warunki konieczne dla funkcji wielu zmiennych

Warunkiem dostatecznym istnienia minimum jest aby Hessian był zdefiniowany dodatnio, czyli $\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{H} \mathbf{x} > 0$ dla $\mathbf{x} \in R^n$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_1 \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_2 \partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_n \partial X_1} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_n \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_n^2} \end{bmatrix}$$



OMNIS

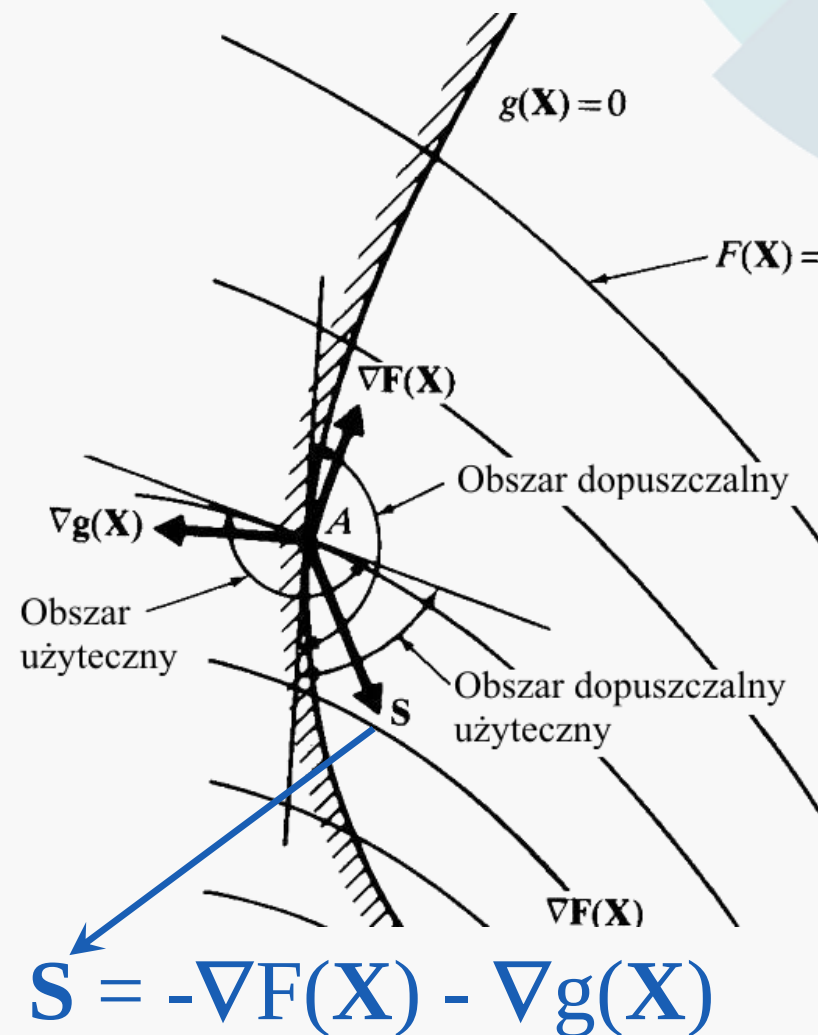
Iteracyjna procedura optymalizacji w obecności więzów

Założenia:

- W punkcie optymalnym co najmniej jeden z więzów jest aktywny. Wtedy nie ma konieczności, aby gradient funkcji celu zniknął w punkcie optymalnym. W przykładzie z kolumną ciężar kolumny będzie zmniejszony albo po zmniejszeniu średnicy albo grubości ścianki kolumny. Jednakże dalsze zmniejszanie ciężaru naruszałoby więzy geometryczne jednostronne.

- Zbiór wszystkich użytecznych kierunków (*usable directions*) definiuje obszar użyteczny (*usable sector*).

Obszar dopuszczalny (*Feasible sector*) jest zdefiniowany przez zbiór gradientów $\nabla g(\mathbf{X})$. Część wspólna obszarów użytecznego i dopuszczalnego będzie nazywana obszarem dopuszczalnym – użytecznym (*usable feasible sector*).





OMNIS

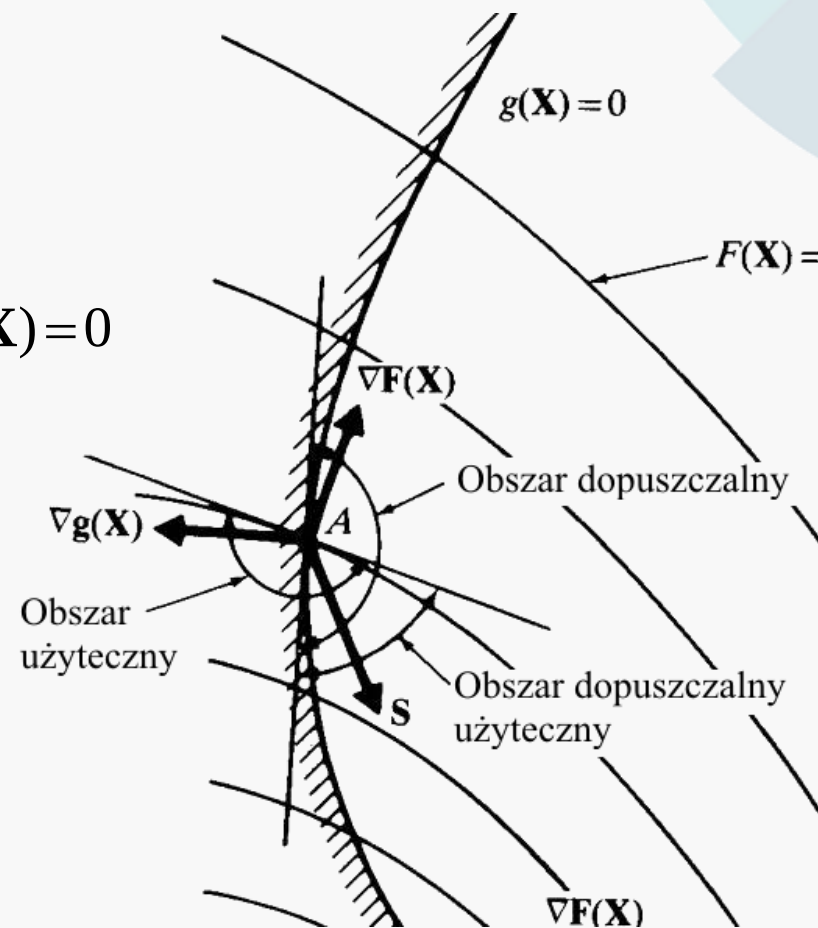
Iteracyjna procedura optymalizacji w obecności więzów – ogólne sformułowanie (1/3)

Kierunek dopuszczalny: $\nabla F(\mathbf{X}) \bullet \mathbf{S} \leq 0$

Kierunek użyteczny:
 $\nabla g_j(\mathbf{X}) \bullet \mathbf{S} \leq 0$
dla wszystkich j dla których $g_j(\mathbf{X}) = 0$

Kierunek dopuszczalny użyteczny:

$$[\nabla F(\mathbf{X}) + \nabla g_j(\mathbf{X})] \bullet \mathbf{S} \leq 0$$





OMNIS

Iteracyjna procedura optymalizacji w obecności więzów – ogólne sformułowanie (2/3)

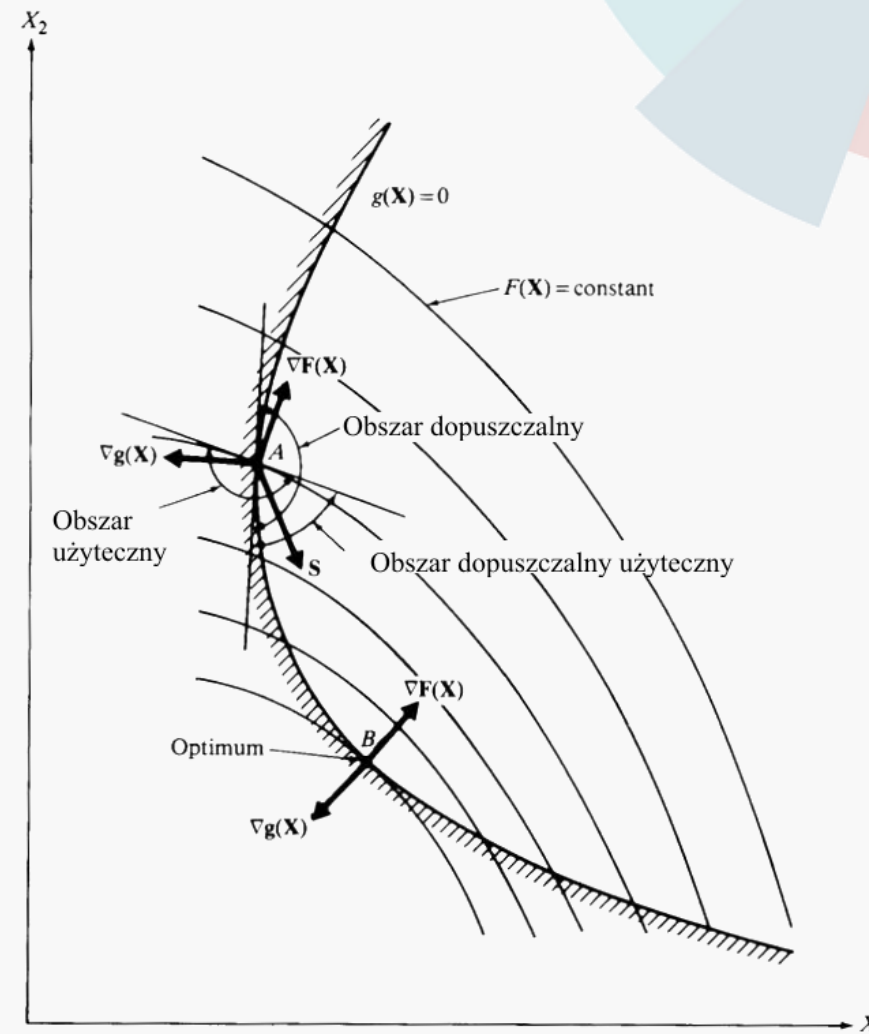
W punkcie B gradienty $\nabla F(\mathbf{X})$ i $\nabla g(\mathbf{X})$ są przeciwne. Dlatego jedyny możliwy kierunek wektora S będzie styczny do linii więzów i funkcji celu, tzn. będzie prostopadły do obu gradientów. Matematycznie warunek ten zapiszemy następująco:

$$\nabla F(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(\mathbf{X}) + \sum_{k=1}^l \lambda_{m+k} \nabla h_k(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_j \geq 0$$

$$\lambda_{m+k} \text{ bez ograniczeń co do znaku}$$

przy czym m jest liczbą więzów jednostronnych i l jest liczbą więzów dwustronnych. Przy braku więzów ($l=m=0$) powyższy warunek redukuje się do warunku dla optimum bez więzów

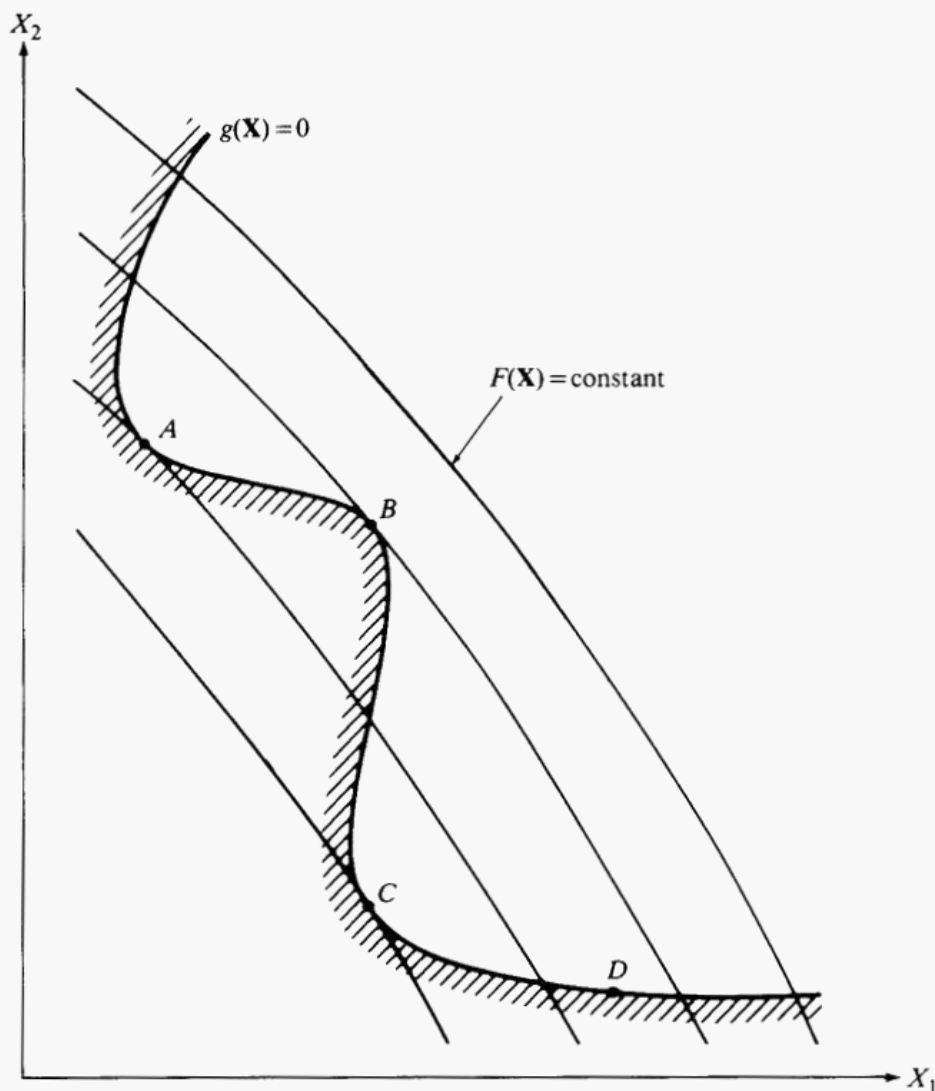




OMNIS

Iteracyjna procedura optymalizacji w obecności więzów – ogólne sformułowanie (3/3)

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



Znalezione na poprzednim slajdzie warunki optimum jest konieczny, ale nie dostateczny. Punkty A,B,C spełniają wszystkie warunki konieczny, ale optimum globalne jest tylko w punkcie C



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



OMNIS

Iteracyjna procedura optymalizacji w obecności więzów – warunki Kuhna-Tuckera

1. $\mathbf{X}^*$ jest punktem dopuszczalnym
(czyli optimum spełnia równania więzów):

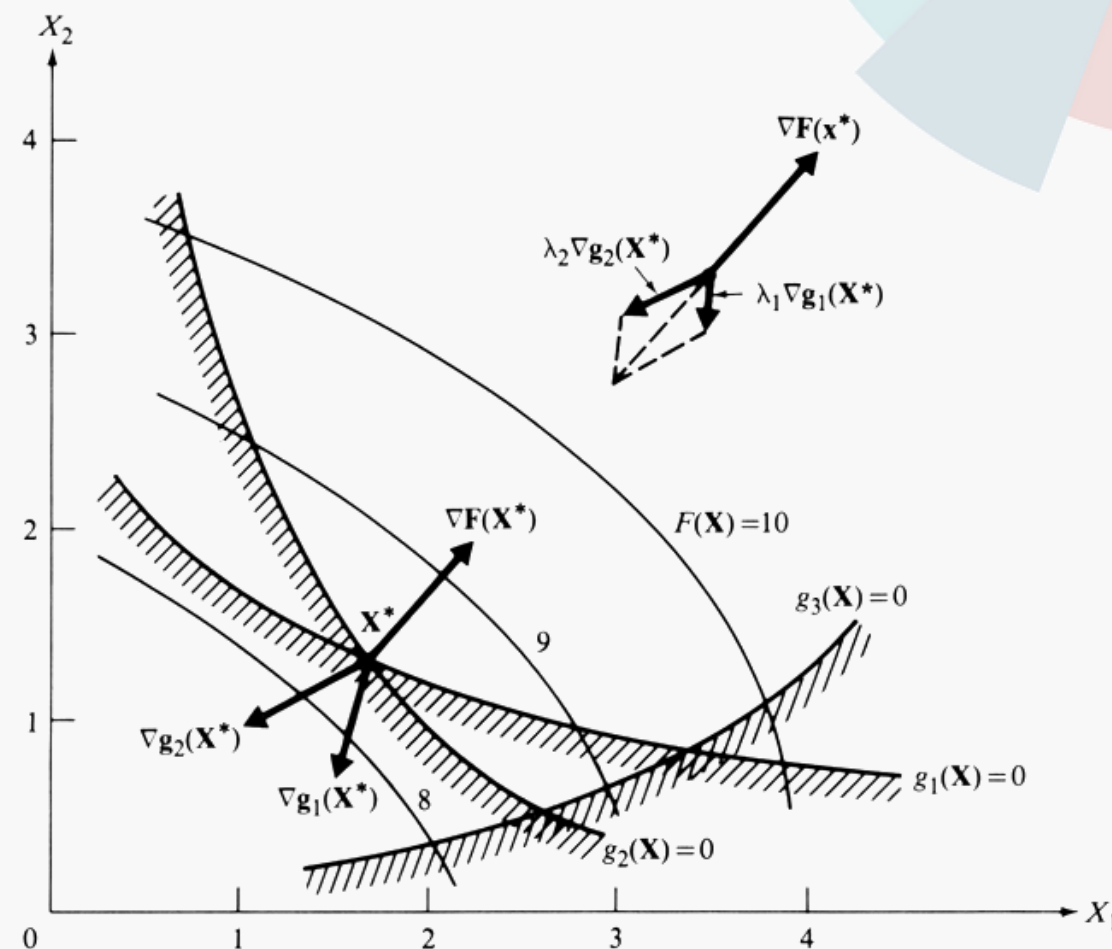
2.
$$\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{X}^*) = 0 ; j = 1, m ; \lambda_j \geq 0$$

(czyli jeżeli więzy nie są spełnione dokładnie,
to mnożniki Lagrange'a muszą być zerowe)

3.
$$\nabla F(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(\mathbf{X}) + \sum_{k=1}^l \lambda_{m+k} \nabla h_k(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_j \geq 0$$

λ_{m+k} bez ograniczeń co do znaku





OMNIS

Przykład – poszukujemy minimum energii potencjalnej wahadła matematycznego

Obliczamy energię potencjalną:

$$PE = (l - l \cos \theta) g m = (1 - \cos \theta) l g m$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2}$$

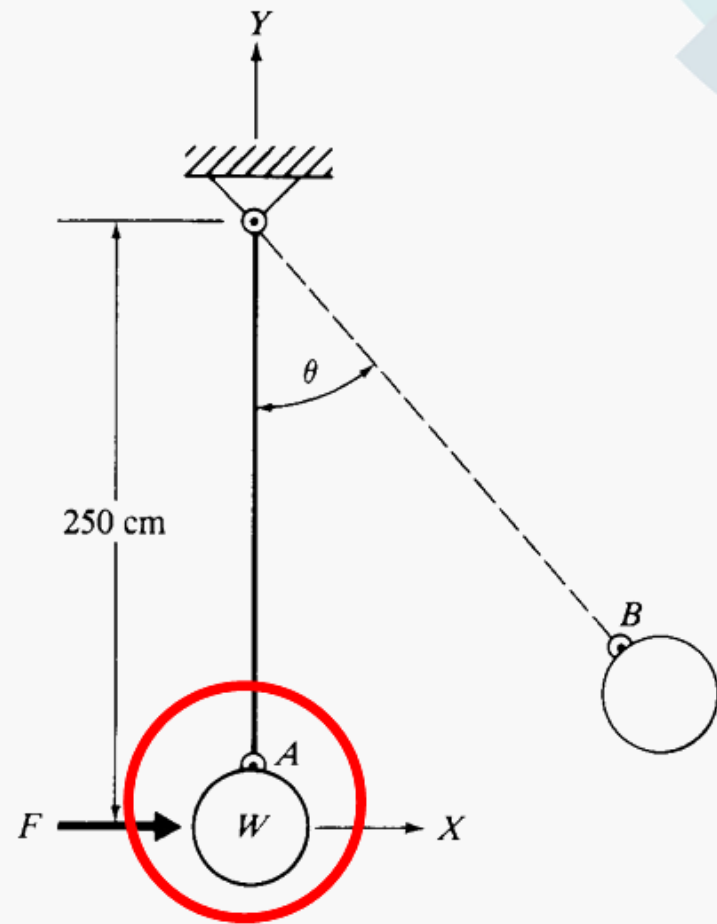
$$\frac{\partial(-\cos \theta)}{\partial \theta} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial^2(-\cos \theta)}{\partial \theta^2} = \cos \theta$$

Minimum energii odpowiada $\theta = x = 0$

Druga pochodna energii potencjalnej dla $\theta = x = 0$ wynosi $\cos \theta$ i jest dodatnia. Oznacza to, że warunek na minimum jest warunkiem dostatecznym.

Minimum energii potencjalnej dla $\theta = 0$
(jest spełniony warunek konieczny ($\sin \theta = 0$)
oraz dostateczny ($\cos \theta > 0$))





OMNIS Optymalizacja w inżynierii lotniczej i kosmicznej

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

Dziękuję za uwagę



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska