



OMNIS

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

Optymalizacja w inżynierii lotniczej i kosmicznej

Wykład 3 Matematyczne podstawy optymalizacji 2

1130-LK000-MSP-1037



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



- minimum funkcji jednej zmiennej – warunki
- metody aproksymacji funkcji jednej zmiennej
 - aproksymacja wielomianami
- ograniczenia funkcji
- znalezienie punktów w których funkcja osiąga wartość zero
- znalezienie minimum funkcji jednej zmiennej
 - z ograniczeniami
 - w obecności więzów



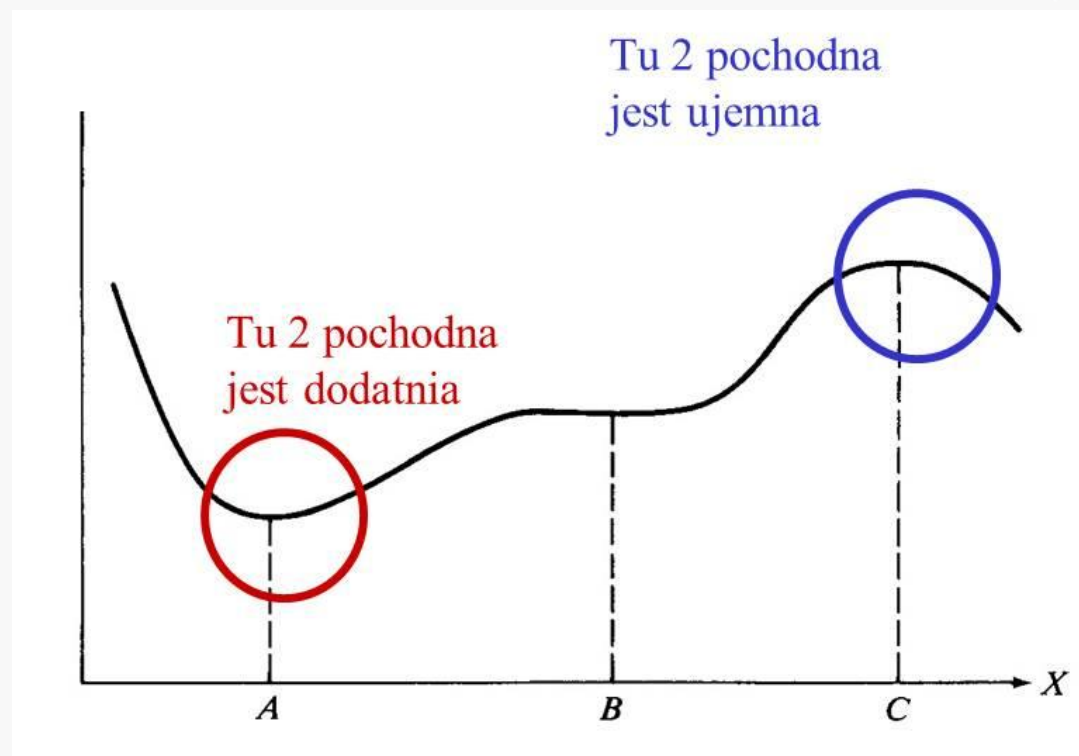
OMNIS

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania optymalnego Warunki konieczne dla funkcji jednej zmiennej

W punkcie, gdzie funkcja jednej zmiennej osiąga minimum pierwsza pochodna znika, czyli

$$\frac{dF}{dX} = 0$$

przy czym jest to warunek konieczny, ale nie dostateczny. Warunkiem dostatecznym istnienia minimum dla funkcji jednej zmiennej jest, aby druga pochodna była dodatnia





OMNIS

Wstęp: funkcje jednej zmiennej (1/6)

Przykład zadania z funkcją jednej zmiennej

Znaleźć zasięg ,który gwarantuje minimum kosztu względnego na jednego pasażera na 1 [nm]?

Dane: koszt względny na jednego pasażera na 1 [nm] dla zasięgu 1000,2000,3000,4000[nm]

Szukamy funkcji kosztu opisanej wzorem: $C = C^* F(R)$

gdzie: $F(R)$ – funkcja zasięgu; R – zasięg [nm];

C – koszt w \$/pasażera/1[nm]; C^* - koszt bazowy;

C/C^* - koszt względny ($= F(R)$);



Warunkiem osiągnięcia przez funkcję minimum (maksimum) jest zerowanie się pochodnej funkcji:

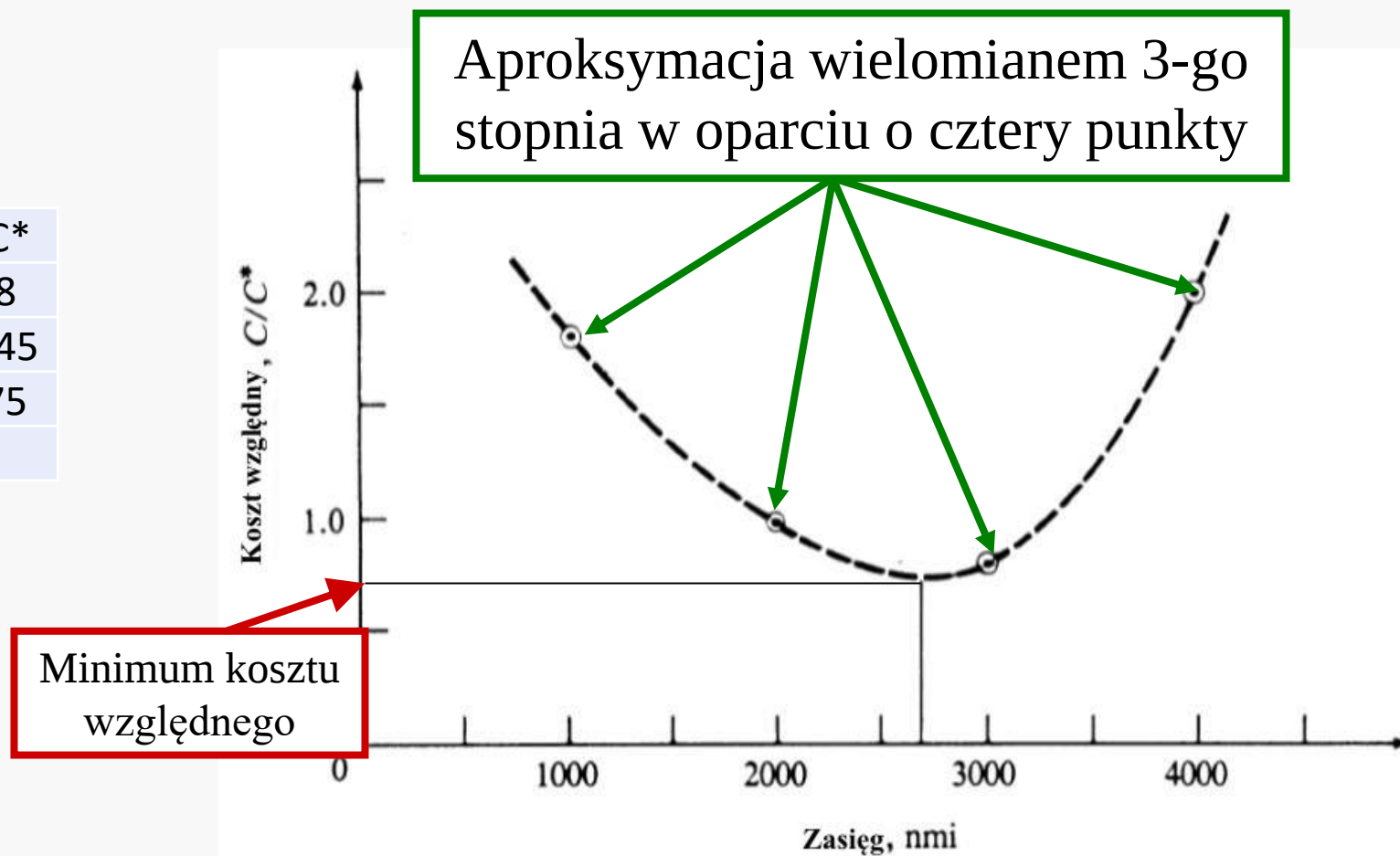
$$\frac{\partial C}{\partial R} = 0$$

Dodatkowym warunkiem może być wyznaczenie maksymalnego zasięgu R , dla którego koszt C nie przekracza zadanej wartości np. $\underline{C}$. W sformułowaniu matematycznym oznacza to, że szukamy zera funkcji:

$$G = C - \underline{C}$$



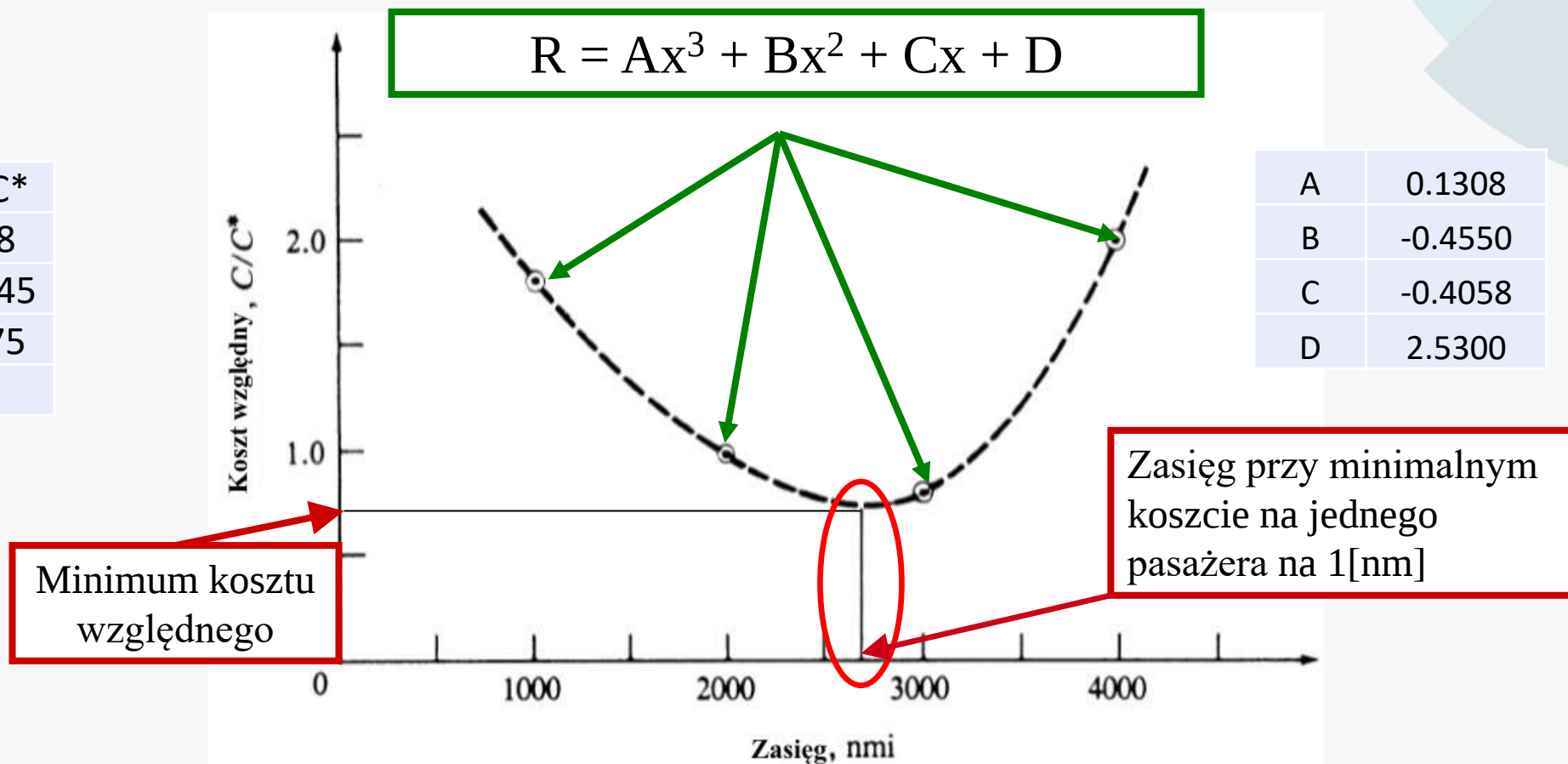
R	C/C^*
1000	1.8
2000	0.945
3000	0.75
4000	2



Funkcja kosztu operacyjnego względem zasięgu



R(tys.)	C/C*
1	1.8
2	0.945
3	0.75
4	2



Funkcja kosztu operacyjnego względem zasięgu

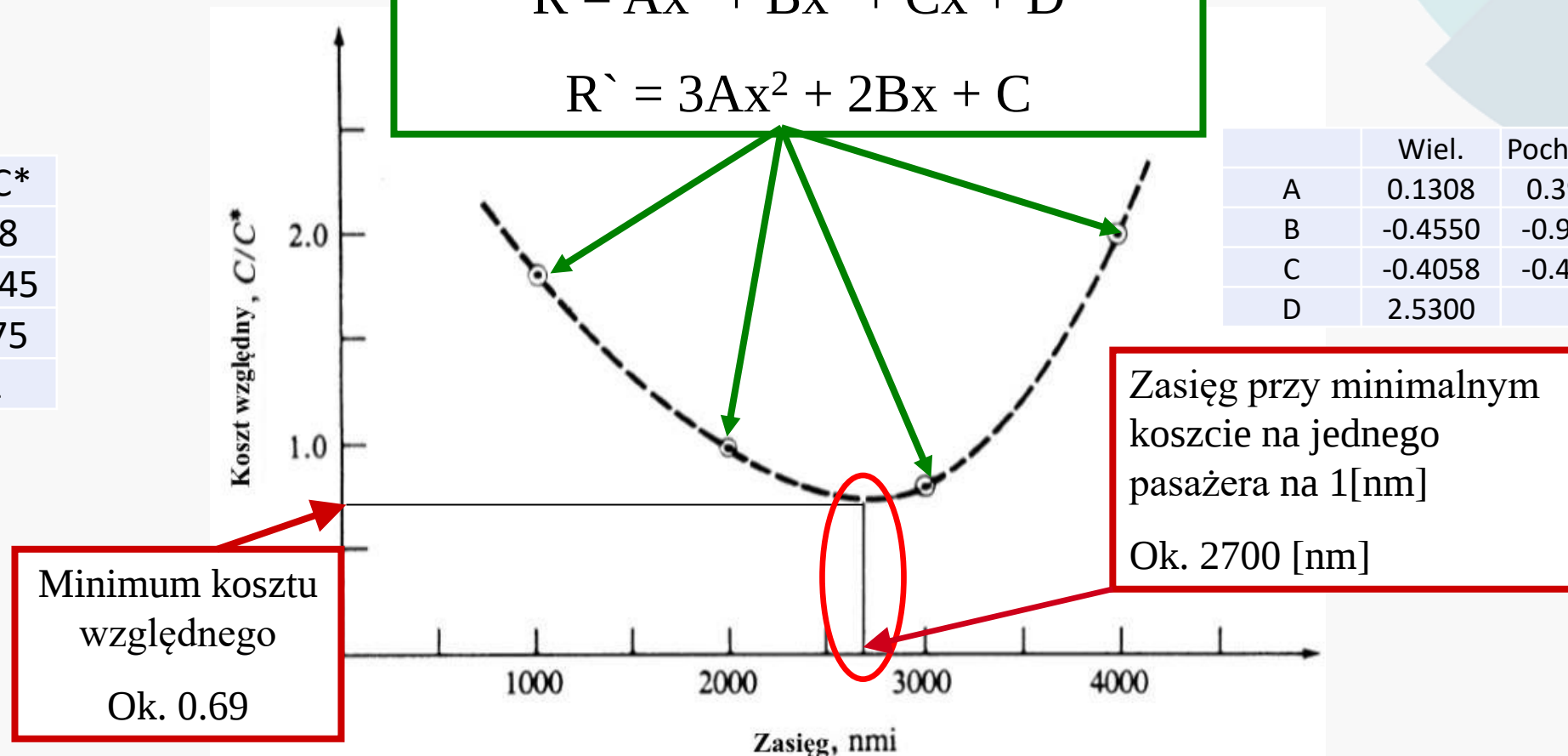


Wstęp: funkcje jednej zmiennej (5/6)

R(tys.)	C/C*
1	1.8
2	0.945
3	0.75
4	2

$$R = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
$$R' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

	Wiel.	Pochodna
A	0.1308	0.3924
B	-0.4550	-0.9100
C	-0.4058	-0.4058
D	2.5300	



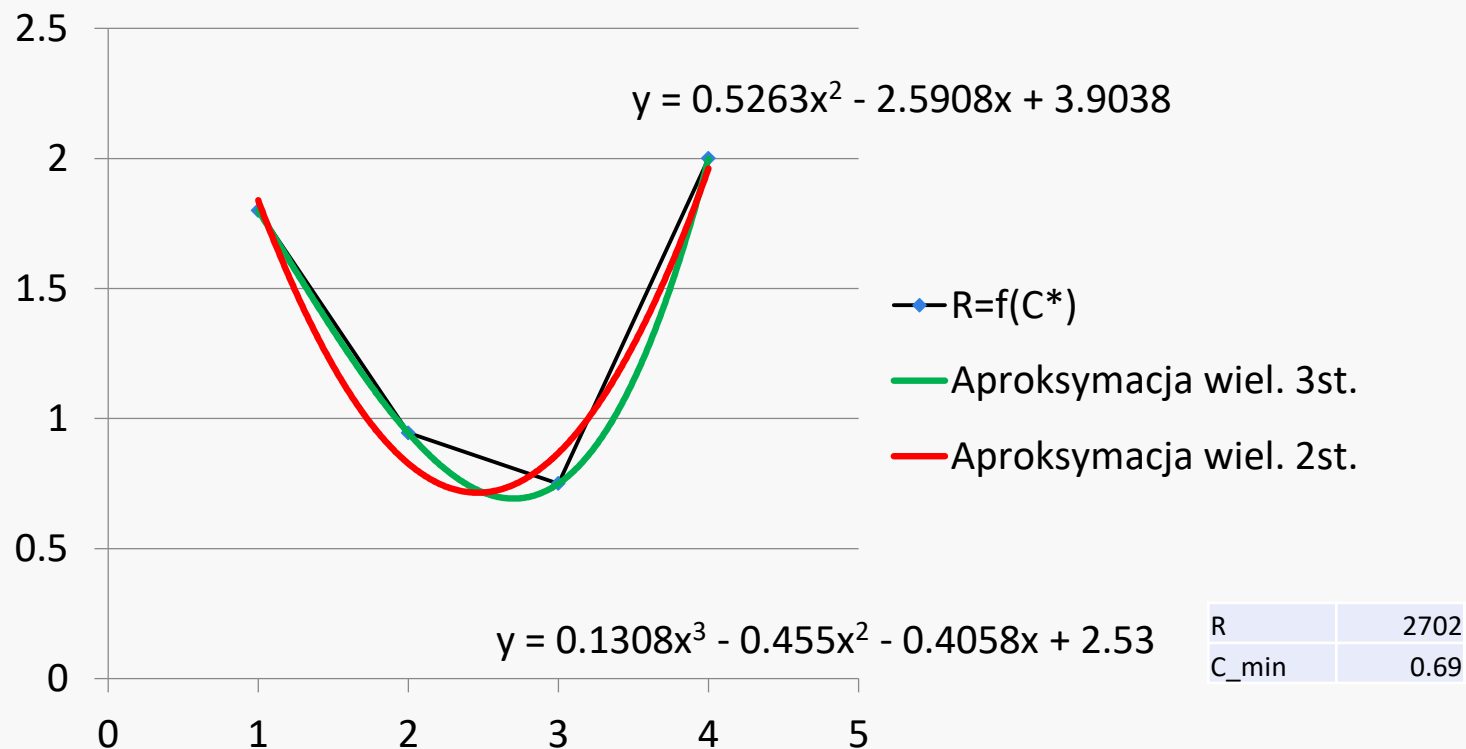
Funkcja kosztu operacyjnego względem zasięgu



Wstęp: funkcje jednej zmiennej (6/6)

Porównanie aproksymacji wielomianem 2-go i 3-go stopnia

R(tys.)	C/C*
1	1.8
2	0.945
3	0.75
4	2



Funkcja kosztu operacyjnego względem zasięgu



OMNIS

Aproksymacja wielomianem (1/10)

Aproksymacja wielomianem jest jedną z najbardziej efektywnych technik znajdowania minimum lub zerowania się funkcji jednej zmiennej.

UWAGA !

Aproksymacja funkcji o dużej nieliniowości może powodować powstawanie dużych rozbieżności pomiędzy rzeczywistym przebiegiem, a funkcją aproksymującą





Generalne zasady:

- Oszacowanie położenia punktu w którym badana funkcja osiąga minimum;
- Aproksymacja funkcji wielomianem w tym punkcie;
- Porównanie rozwiązania ścisłego i rozwiązania za pomocą wielomianu aproksymującego;
- Jeżeli różnica pomiędzy rozwiązaniami jest w granicach zakładanego błędu to można powiedzieć że aproksymacja została dokonana poprawnie;



Przykład: Znaleźć minimum funkcji opisanej wzorem

$$F = 1 - 3X + e^{2X}$$

Znajdujemy pierwszą pochodną danej funkcji

$$F' = -3 + 2e^{2X}$$

Zakładamy aproksymację funkcji za pomocą wielomianu drugiego rzędu

$$\tilde{F} = a_0 + a_1X + a_2X^2$$

Znajdujemy pierwszą pochodną wielomianu aproksymującego

$$\tilde{F}' = \frac{dF}{dX} = a_1 + 2a_2X$$



Zakładamy punkty na podstawie których powstanie wielomian:

np. $X = 0$ i $X = 0.5$

Powstaje układ równań z którego wyznaczamy współczynniki wielomianu

$$a_0 = 2.0$$

$$a_0 + 0.5a_1 + 0.25a_2 = 2.2183$$

$$a_1 = -1.0$$

Wartość pochodnej w punkcie $X=0$ wyznaczona z równania oryginalnego

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

$$a_0 = 2.0 \quad a_1 = -1.0 \quad a_2 = 2.873$$

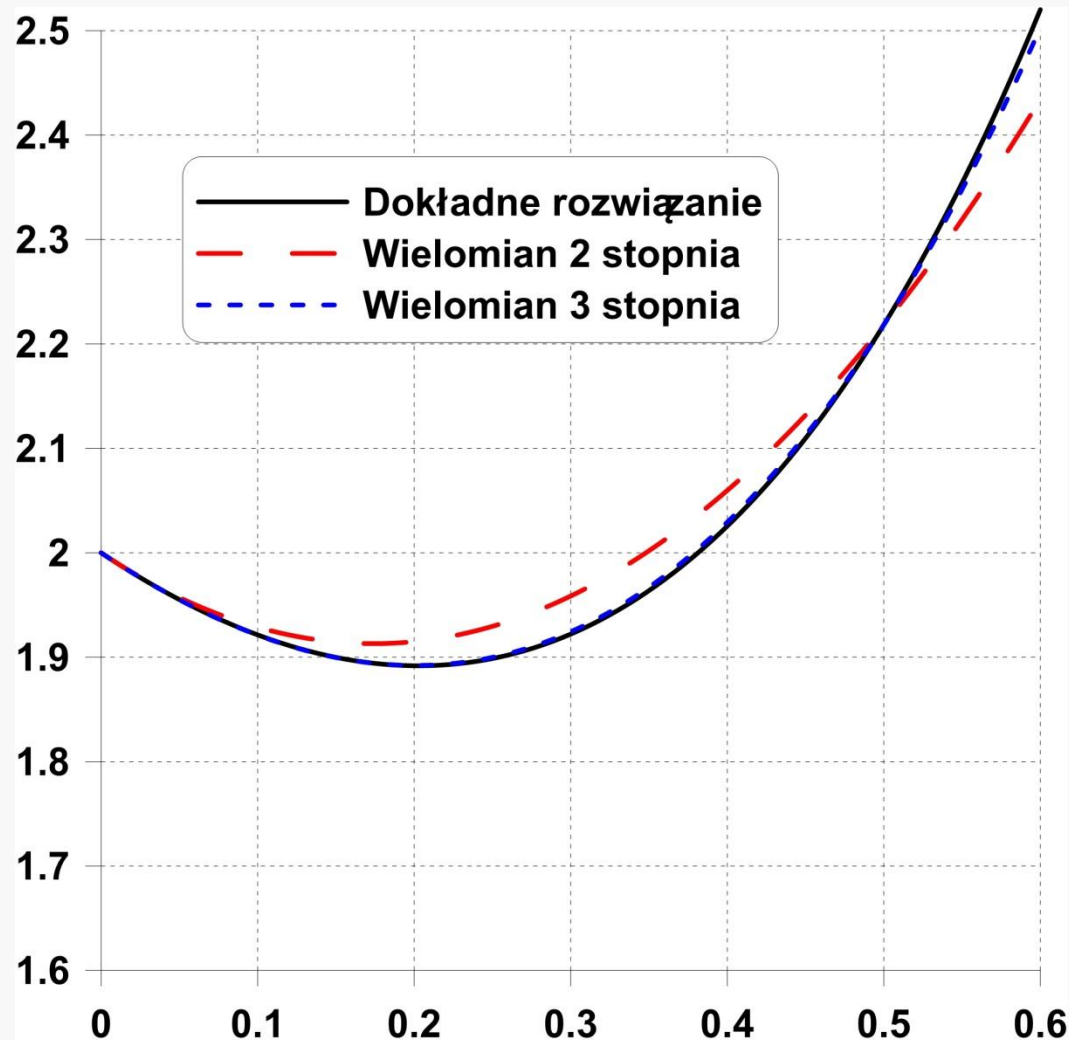


W rezultacie otrzymujemy wielomian aproksymujący:

$$\tilde{F} = 2.0 + 1.0X + 2.873X^2$$

Przy założeniu aproksymacji wielomianem trzeciego stopnia otrzymamy równanie:

$$\tilde{F} = 2.0 + 1.0X + 1.923X^2 + 1.9X^3$$



Aproksymacje funkcji $F(X)$
za pomocą wielomianów

Porównanie aproksymacji
wielomianem 2-go i 3-go stopnia



Porównanie aproksymacji przy zastosowaniu różnego stopnia wielomianu

Metoda	X	F	F'	$\tilde{F}$
Dane węzłów	0.0	2.0	-1.0	-
	0.5	2.2183	-	-
2-punktowa aproksymacja 2 stopnia	0.17403	1.8942	-	1.9130
3-punktowa aproksymacja 3 stopnia	0.20045	1.8918	-	1.8921
4-punktowa aproksymacja 3 stopnia	0.20242	1.8918	-	1.8918
Rozwiązanie dokładne	0.20273	1.8918	0.0	-

Współrzędne punktu minimum

Wartości funkcji
aproksymującej
w minimum



Porównanie aproksymacji przy zastosowaniu różnego stopnia wielomianu

Aproksymacja	$F1$	$F1'$	$F2$	$F3$	$F4$
1-punktowa liniowa	X	X	-	-	-
2-punktowa liniowa	X	-	X	-	-
2-punktowa kwadratowa	X	X	X	-	-
3-punktowa kwadratowa	X	-	X	X	-
3-punktowa sześcienna	X	X	X	X	-
4-punktowa sześcienna	X	-	X	X	X

Zadajemy wartości w punktach 1,2,3,4 oraz pochodną w punkcie 1 (wszystko w zależności od typu aproksymacji)

$$F = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$



UWAGI DO APROKSYMACJI WIELOMIANOWEJ:

- Interpolacja pomiędzy dwoma punktami jest lepszym rozwiązaniem niż ekstrapolacja;
- Korzystne jest rozpocząć aproksymację stosując wielomian niższego stopnia (mniejsza liczba niezbędnych danych), a następnie zastosować wielomian wyższego rzędu uzyskując poprawę wyniku; (bazowanie na poprzednich rozwiązaniach)
- Użycie pochodnych wyższego rzędu nie gwarantuje zwiększenia dokładności obliczeń;



Wniosek:

- Należy aproksymować wielomianem takiego stopnia jaki jest możliwy stosując minimum dostępnych danych. Następnie stopniowo zwiększać stopień wielomianu (bazując na wynikach uzyskanych za pomocą wielomianu niższego stopnia) w celu poprawy rozwiązania



Definicja współczynników wielomianu w zależności od stopnia wielomianu i liczby punktów użytych do aproksymacji

Wzór ogólny wielomianu:

$$F(\mathbf{X}) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

Aproksymacja liniowa jedno-punktowa: $a_3 = 0$

Dane: (X_1, F_1, F_1')

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = F_1'$$

$$a_0 = F_1 - F_1' X_1$$



Aproksymacja liniowa dwu-punktowa:

Dane: $(X_1, F_1), (X_2, F_2)$

$$a_3 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = \frac{F_2 - F_1}{X_2 - X_1}$$

$$a_0 = F_1 - a_1 X_1$$



Aproksymacja kwadratowa dwu-punktowa:

Dane: $(X_1, F_1, F_1'), (X_2, F_2)$

$$a_3 = 0$$

$$a_2 = \frac{(F_2 - F_1)/(X_2 - X_1) - F_1'}{X_2 - X_1}$$

$$a_1 = F_1' - 2a_2X_1$$

$$a_0 = F_1 - a_1X_1 - a_2X_1^2$$



Aproksymacja kwadratowa trzy-punktowa:

Dane: $(X_1, F_1), (X_2, F_2), (X_3, F_3)$

$$a_3 = 0$$

$$a_2 = \frac{(F_3 - F_1) / (X_3 - X_1) - (F_2 - F_1) / (X_2 - X_1)}{X_3 - X_2}$$

$$a_1 = \frac{F_2 - F_1}{X_2 - X_1} - a_2 (X_1 + X_2)$$

$$a_0 = F_1 - a_1 X_1 - a_2 X_1^2$$



Aproksymacja sześcienna trzy-punktowa:

Dane: $(X_1, F_1, F_1'), (X_2, F_2), (X_3, F_3)$

$$a_3 = \frac{F_3 - F_1}{(X_3 - X_2)(X_3 - X_1)^2} - \frac{F_2 - F_1}{(X_3 - X_2)(X_3 - X_1)^2} + \frac{F_1'}{(X_2 - X_1)(X_3 - X_1)}$$

$$a_2 = \frac{(F_2 - F_1)/(X_3 - X_1) - F_1'}{X_2 - X_1} - a_3(2X_1 + X_2)$$

$$a_1 = F_1' - 2a_1X_1 - 3a_3X_1^2$$

$$a_0 = F_1 - a_1X_1 - a_2X_1^2 - a_3X_1^3$$



Aproksymacja sześcienna cztero-punktowa:

Dane: $(X_1, F_1), (X_2, F_2), (X_3, F_3), (X_4, F_4)$

Dla ułatwienia wprowadzamy dodatkowe wielkości Q_1 - Q_6

$$Q_1 = X_3^3(X_2 - X_1) - X_2^3(X_3 - X_1) + X_1^3(X_3 - X_2)$$

$$Q_2 = X_4^3(X_2 - X_1) - X_2^3(X_4 - X_1) + X_1^3(X_4 - X_2)$$

$$Q_3 = (X_3 - X_2)(X_2 - X_1)(X_3 - X_1)$$

$$Q_4 = (X_4 - X_2)(X_2 - X_1)(X_4 - X_1)$$

$$Q_5 = F_3(X_2 - X_1) - F_2(X_3 - X_1) + F_1(X_3 - X_2)$$

$$Q_6 = F_4(X_2 - X_1) - F_2(X_4 - X_1) + F_1(X_4 - X_2)$$



Aproksymacja sześcienna cztero-punktowa:

Dane: $(X_1, F_1), (X_2, F_2), (X_3, F_3), (X_4, F_4)$

Używając oznaczeń Q_1 - Q_6 współczynniki wielomianu mają postać:

$$a_3 = \frac{Q_3 Q_6 - Q_4 Q_5}{Q_2 Q_3 - Q_1 Q_4}$$

$$a_2 = \frac{Q_5 - a_3 Q_1}{Q_3}$$

$$a_1 = \frac{F_2 - F_1}{X_2 - X_1} - a_3 \frac{X_2^3 - X_1^3}{X_2 - X_1} - a_2 (X_1 + X_2)$$

$$a_0 = F_1 - a_1 X_1 - a_2 X_1^2 - a_3 X_1^3$$



Poszukując minimum funkcji $F(X)$ lub punktu w którym wartości funkcji jest zero, niezbędne jest ustanowienie zakresu zmienności zmiennej X tj. ustalenia granicy lewostronnej X_L i prawostronnej X_P .

Granice mogą być fizyczne podstawy zagadnienia lub w przypadku trudności z ich określeniem - logiczne podejście do badanego zagadnienia.

Założenia:

- znana jest wartość funkcji $F(X=0)$;
- rozwiązania poszukujemy w zakresie liczb rzeczywistych dodatnich;



OGRANICZENIE typu $F(X)=0$

$$F_L F_U \leq 0$$

$$X_U = X_L + \Delta X$$

$$F \approx F_L + F'_L \cdot \Delta X = 0$$

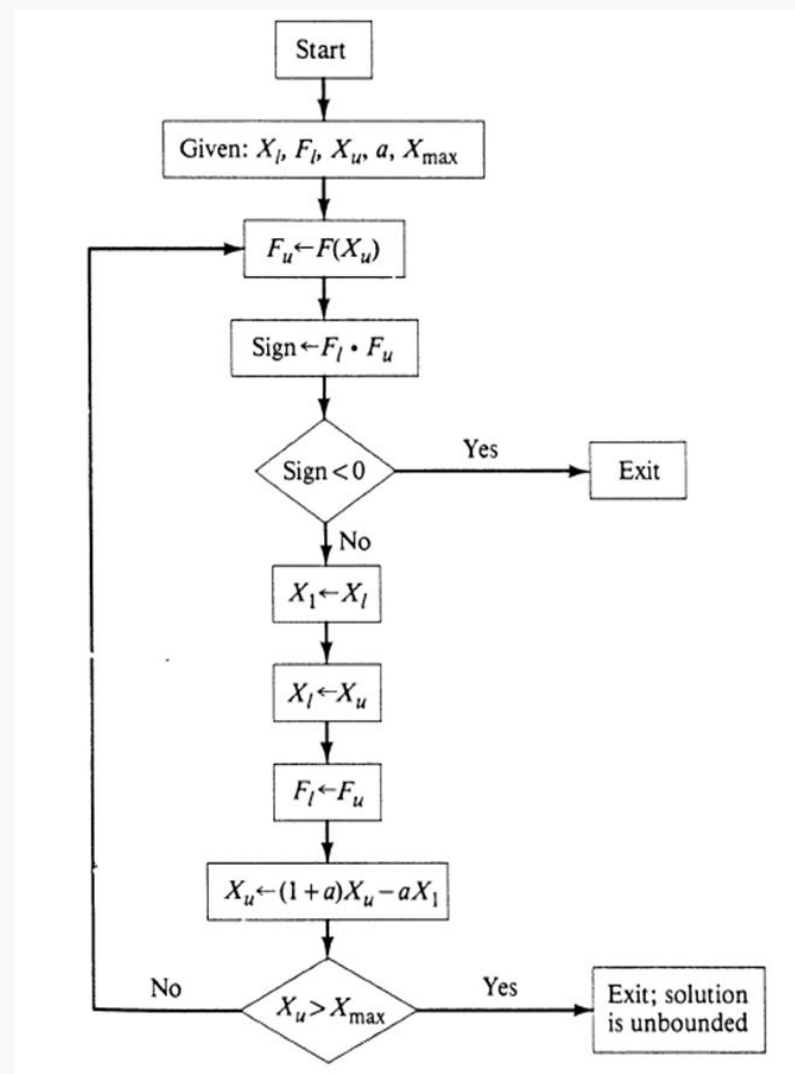
$$\Delta X = \frac{-F_L}{F'_L}$$

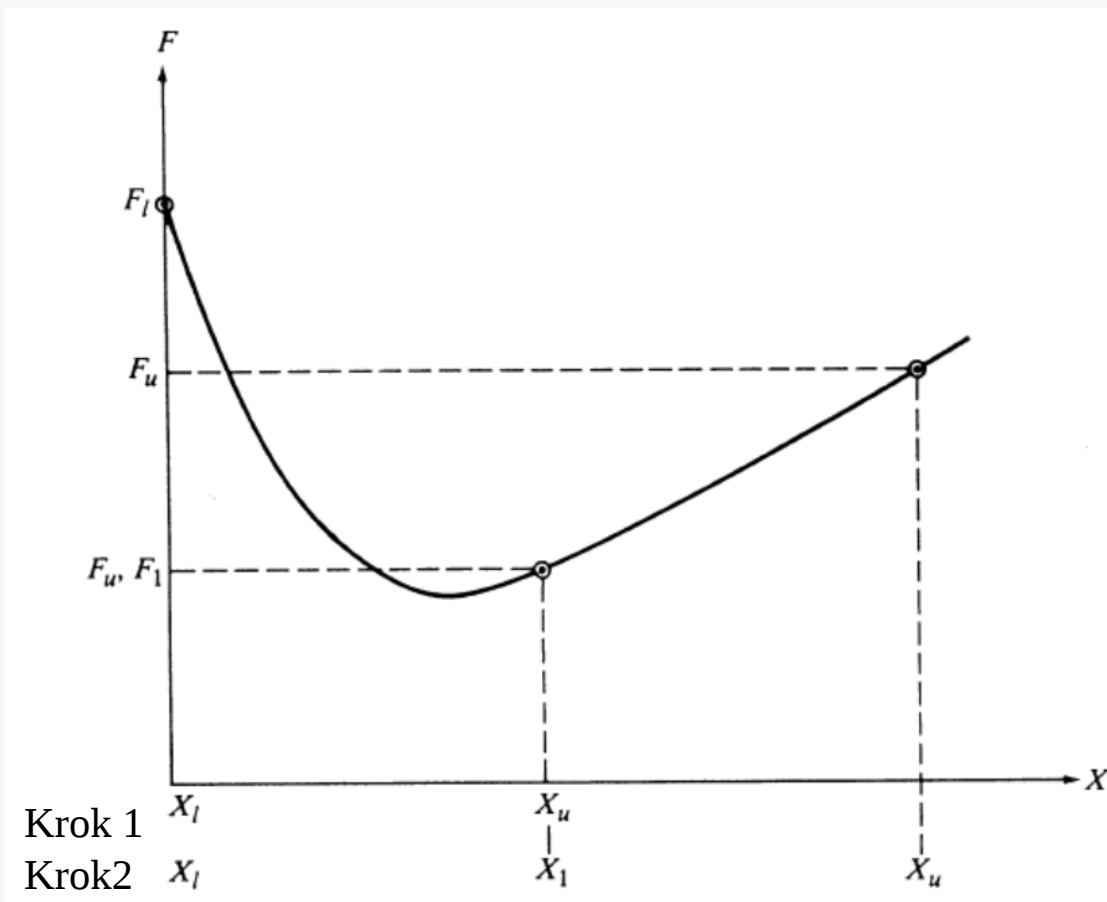


OMNIS

Ograniczenia (3/5)

Algorytm znalezienia $F=0$



OGRANICZENIE typu $F(X)$ minimum

Proces jest analogiczny
do wyznaczania
wartości X w którym
pochodna funkcji jest
równa zero

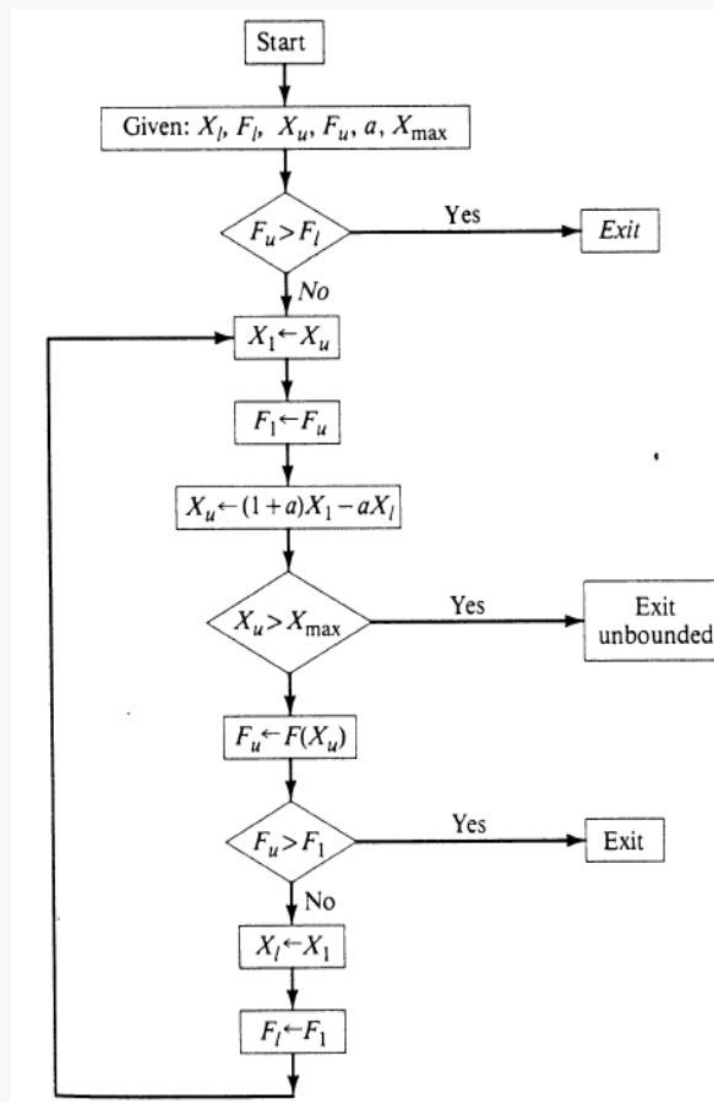
$$\tilde{F}'(X) = 0$$



OMNIS

Ograniczenia (5/5)

Algorytm znalezienia
minimum $F(X)$





OMNIS

Zera Wielomianu (1/8)

Wyznaczenie punktu X w którym funkcja $F(X)=0$

$$\tilde{F}(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 = 0$$

Równanie reprezentuje wielomian trzeciego stopnia





OMNIS

Zera wielomianu (2/8)

Aproksymacja liniowa :

$$a_3 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$\tilde{F}(X) = a_0 + a_1 X$$

$$X^* = \frac{-a_0}{a_1}$$

Rozwiązaniem jest jeden
pierwiastek



Aproksymacja równaniem kwadratowym :

$$\tilde{F}(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \quad a_3 = 0$$

$$b = a_1^2 - 4a_0a_2$$

$b > 0$ - dwa pierwiastki rzeczywiste

$$X_1^* = \frac{-a_1 + \sqrt{b}}{2a_2}$$

$b = 0$ - jeden pierwiastek podwójny

Rozwiązania oczekiwane

$$X_2^* = \frac{-a_1 - \sqrt{b}}{2a_2}$$

$b < 0$ - rozwiązanie w postaci liczb zespolonych

Rozwiązanie pomijane



OMNIS

Zera Wielomianu (4/8)

Aproksymacja równaniem 3-go stopnia :

$$\tilde{F}(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 = 0$$

Aproksymacja dająca wielokrotne pierwiastki



Aproksymacja równaniem 1-go stopnia :

Metoda **Newtona – Raphsona** wyznaczania zera wielomianów wyższych stopni

Metoda pierwszego rzędu wykorzystująca funkcję oraz jej pochodną

$$F \approx F_0 + F_0'(X - X_0)$$

gdzie:

X_0 – wartość początkowa;

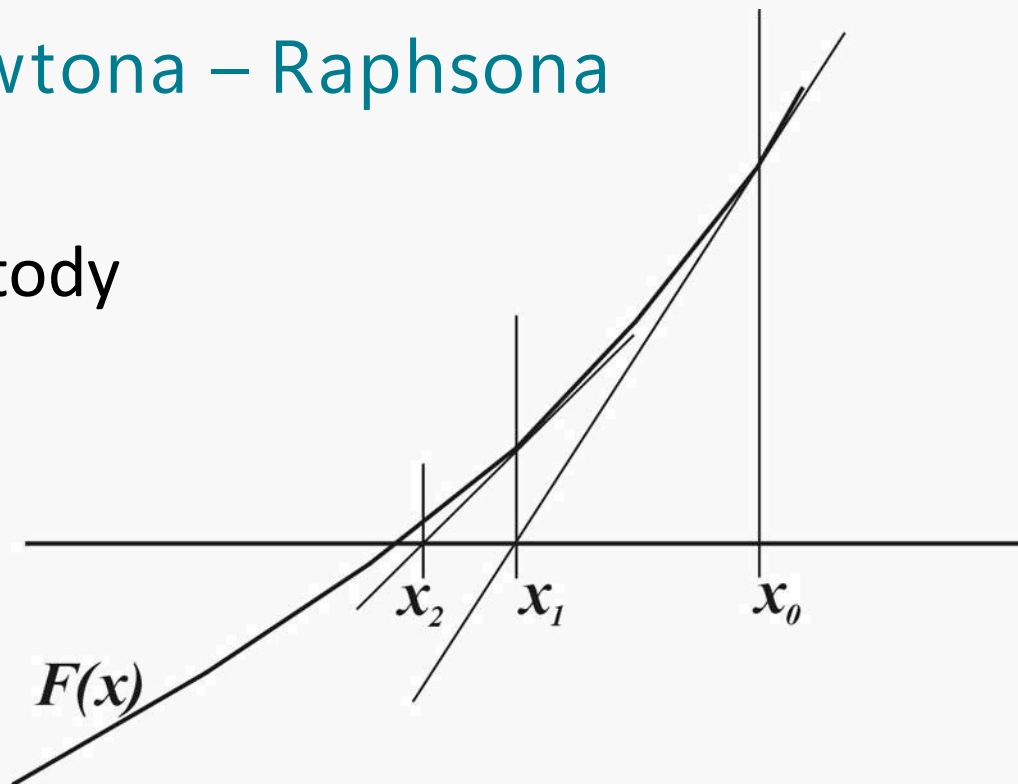
F_0 – wartość funkcji w punkcie X_0 ;

F_0' – wartość pochodna w punkcie X_0 ;



Metoda Newtona – Raphsona

Jest to połączenie metody iteracyjnej z lokalną aproksymacją za pomocą stycznej



Jeżeli x_0 jest dobrym przybliżeniem początkowym, to proces Newtona-Raphsona jest bardzo szybko zbieżny

$$\frac{df}{dx} = g(x)$$

$$y = g(x_0)x + C(x_0)$$

dla $x = x_0$ mamy

$$g(x_0)x_0 + C(x_0) = f(x_0)$$

$$C(x_0) = f(x_0) - g(x_0)x_0$$

dla $x = x_1$ mamy

$$g(x_0)x_1 + C(x_0) = 0$$

$$x_1 = -\frac{C(x_0)}{g(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{g(x_i)}$$



Aproksymacja równaniem 1-go stopnia:

$$F_0 + F_0'(X - X_0) = 0$$

$$X_1 = X_0 - \frac{F_0}{F_0'}$$

gdzie:

X_1 – pierwsza iteracja
rozwiązania;

$$X_N = X_{N-1} - \frac{F_{N-1}}{F_{N-1}'}$$

X_N – N-ta iteracja
rozwiązania;



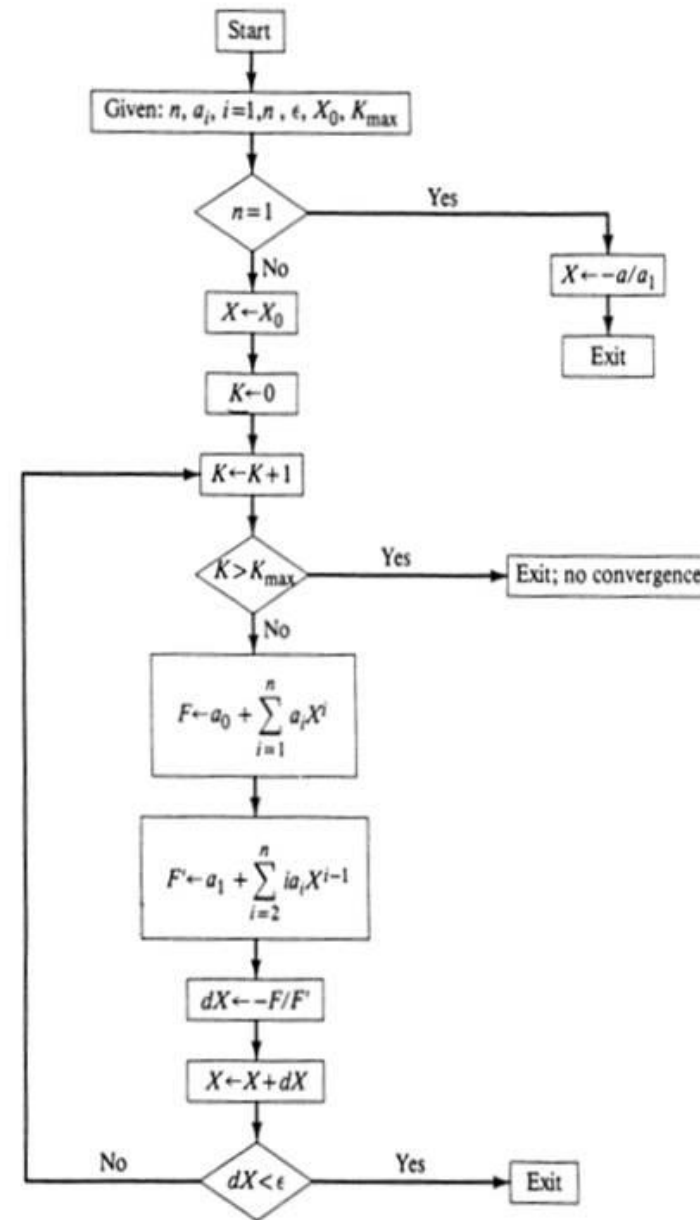
OMNIS

Zera wielomianu (8/8)

Algorytm wyznaczania
pierwszego „zera” wielomianu
n-tego rzędu przy użycie metody
Newtona – Raphsona

n – stopień wielomianu

$K_{\max}$ = maksymalna liczba iteracji





PODSTAWOWY WARUNEK

Znalezienie wartości X przy której funkcja aproksymująca osiąga minimum lub maksimum polega na znalezieniu punktu przy którym jest spełnione równanie:

$$\tilde{F}'(X) = 0$$



Minimum lub maksimum dla aproksymacji równaniem kwadratowym:

$$\tilde{F}(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

Rozwiązanie:

$$X^* = \frac{-a_1}{2a_2}$$

Gdzie:

X^* - minimum funkcji jeśli $a_2 > 0$;

X^* - maksimum funkcji jeśli $a_2 < 0$;



OMNIS

Minimum lub maksimum wielomianu (3/5)

Minimum lub maksimum dla aproksymacji równaniem sześciennym:

$$\tilde{F}(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

zdefiniujmy:

$$b = a_2^2 - 3a_1a_3$$



Minimum lub maksimum dla aproksymacji równaniem sześciennym:

Rozwiązanie:

$$X_1^* = \frac{-a_2 + \sqrt{b}}{3a_3}$$

$$X_2^* = \frac{-a_2 - \sqrt{b}}{3a_3}$$

b > 0 - dwa pierwiastki rzeczywiste

b = 0 - jeden pierwiastek podwójny

b < 0 - rozwiązanie w postaci liczb zespolonych



Minimum lub maksimum dla aproksymacji równaniem sześciennym:

Aby określić czy jest to maksimum czy minimum należy sprawdzić znak $F''(X=X_1^*)$ i $F''(X=X_2^*)$

Równanie drugiej
pochodnej

$$\tilde{F}''(X) = 2a_2 + 6a_3 X$$

Przy założeniu że **b>0:**

$$\tilde{F}''(X_1^*) = 2\sqrt{b}$$

Minimum funkcji

$$\tilde{F}''(X_2^*) = -2\sqrt{b}$$

Maksimum funkcji



OMNIS

Wyznaczanie maksimum lub minimum funkcji z ograniczeniami

Metody:

- metoda złotego podziału
- metoda Fibonacciego





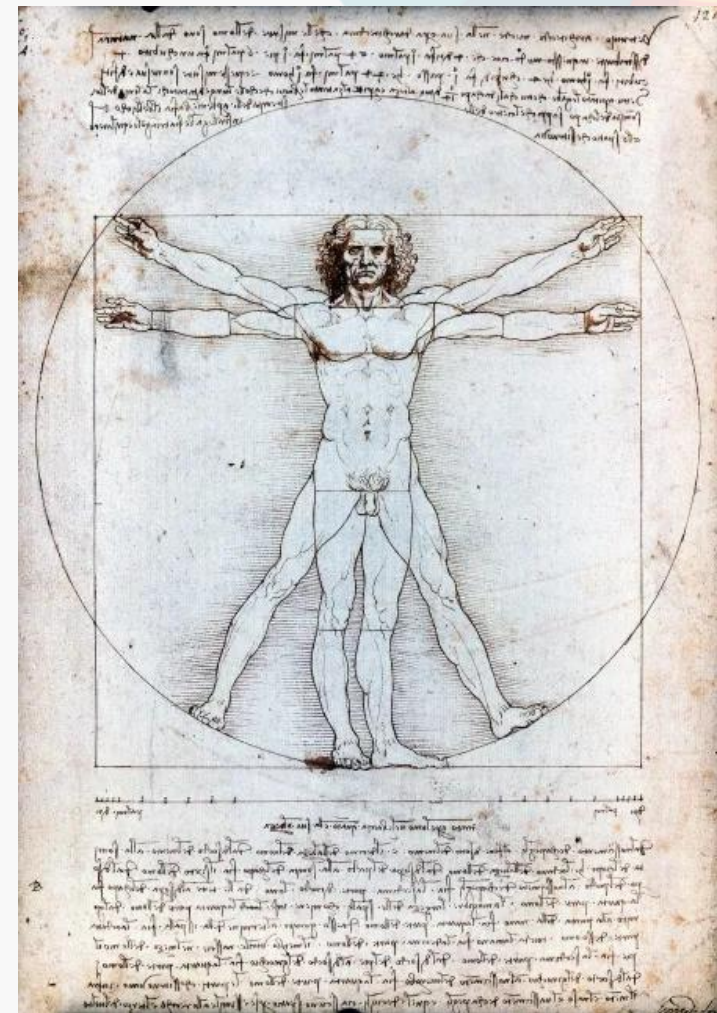
OMNIS

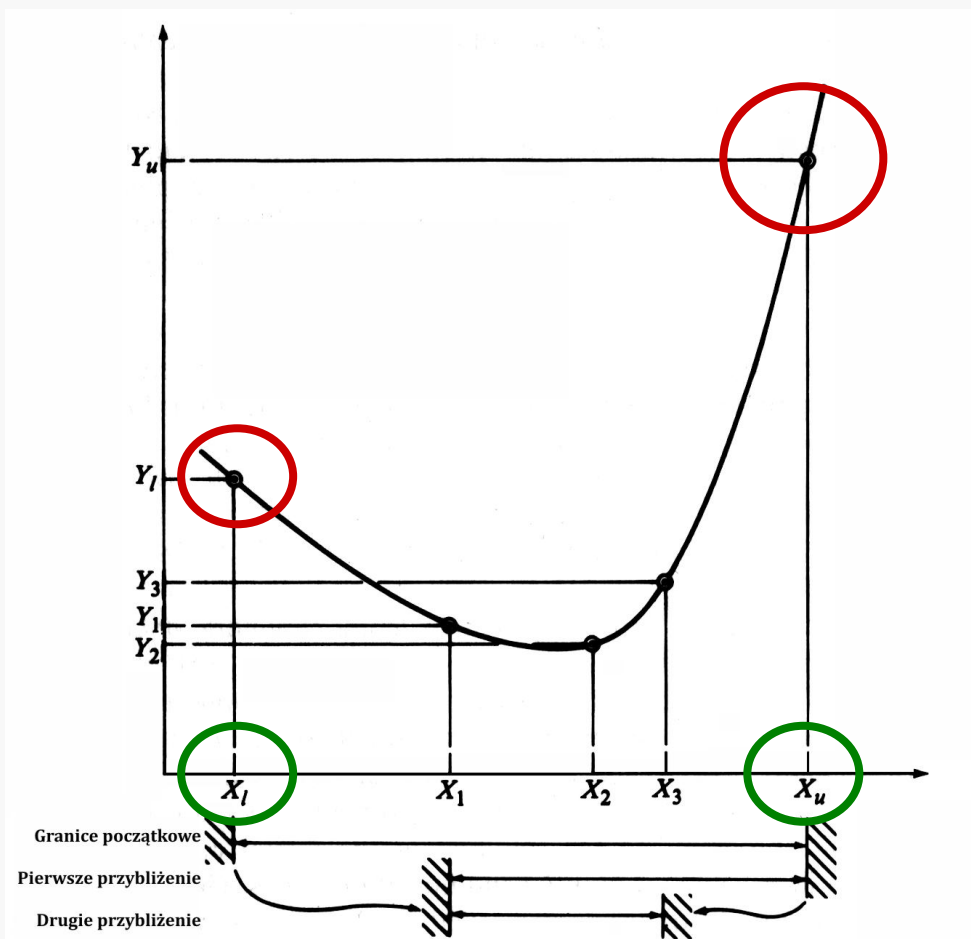
Metoda „Złotego Podziału” (1/7)

Metoda „Złotego podziału” do oszacowania maksimum, minimum oraz zerowania się funkcji.

ZALETY

- funkcja nie musi mieć ciągłych pochodnych;
- prędkości zbieżności jest znana w stosunku do innych metod;
- metoda łatwo programowalna;
- metoda niezawodna do zagadnień słabo uwarunkowanych;



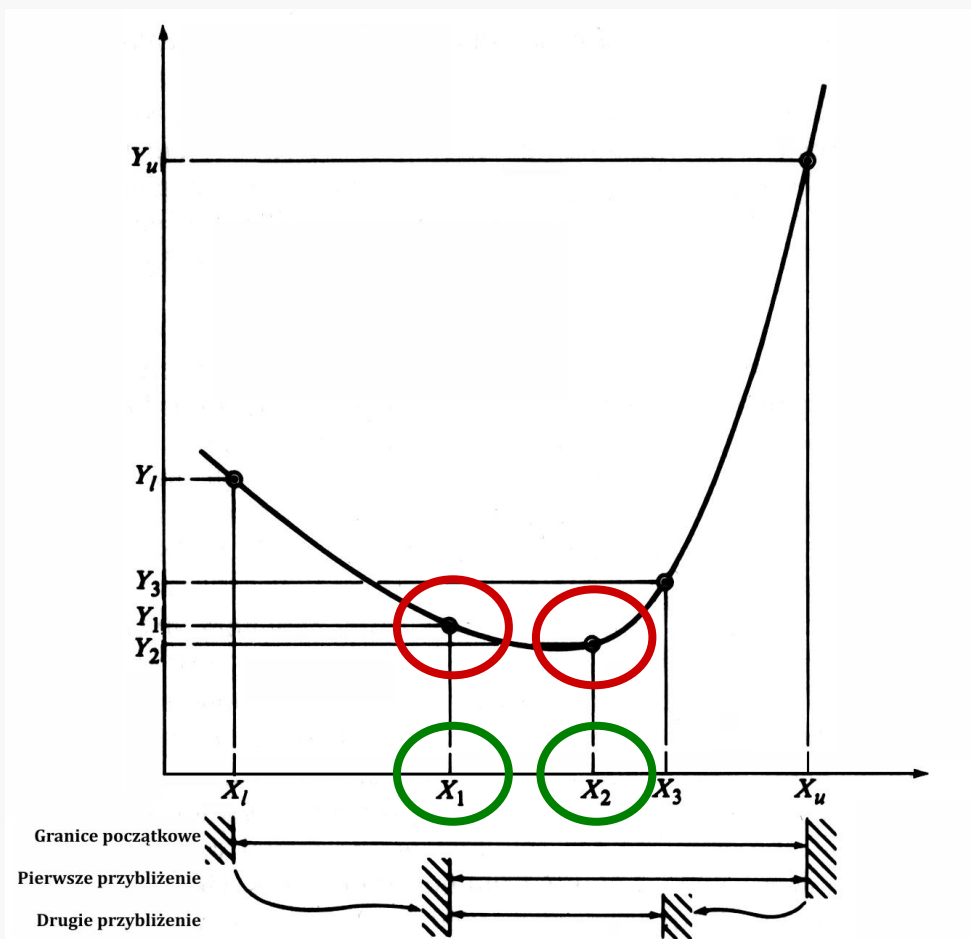


Założenie:

Granice lewostronne X_L oraz $F(X_L)$

i prawostronne: X_U oraz $F(X_U)$

są znane



Wstawiamy dwa pośrednie punkty

$$X_1 < X_2$$

i wyznaczamy odpowiednio wartości funkcji w tych punktach

$$F_1, F_2$$



OMNIS

Metoda „Złotego Podziału” (4/7)

Sposób na wyznaczenie wewnętrznych punktów tak aby zewnętrzne granice „zbiegały się” jak najszybciej

Zakładamy symetryczny rozkład:

$$X_U - X_2 = X_1 - X_L$$

Zawężenie przedziału

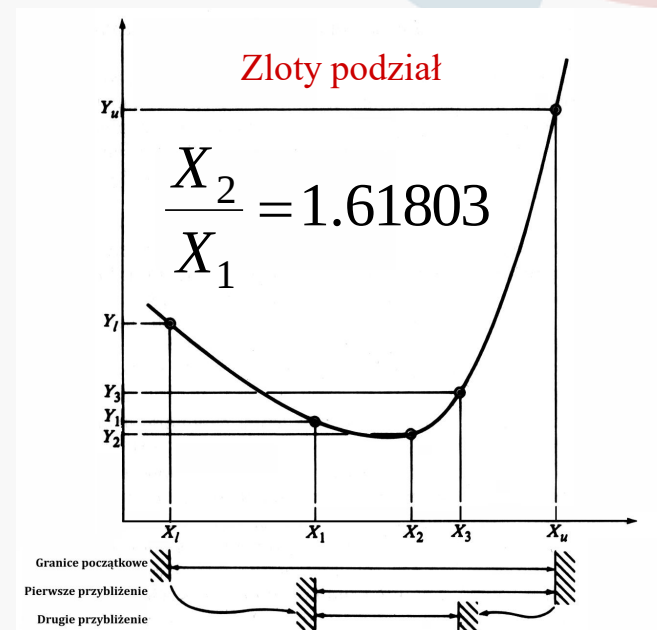
Ponadto przyjmujemy, że:

$$\frac{X_1 - X_L}{X_U - X_L} = \frac{X_2 - X_1}{X_U - X_1}$$

Złoty podział

Założmy dla uproszczenia, że $X_L = 0$ i $X_U = 1$.

Wtedy: $X_1 = \frac{1 - 2X_1}{1 - X_1}$ stąd mamy $X_1^2 - 3X_1 + 1 = 0$





OMNIS

Metoda „Złotego Podziału” (5/7)

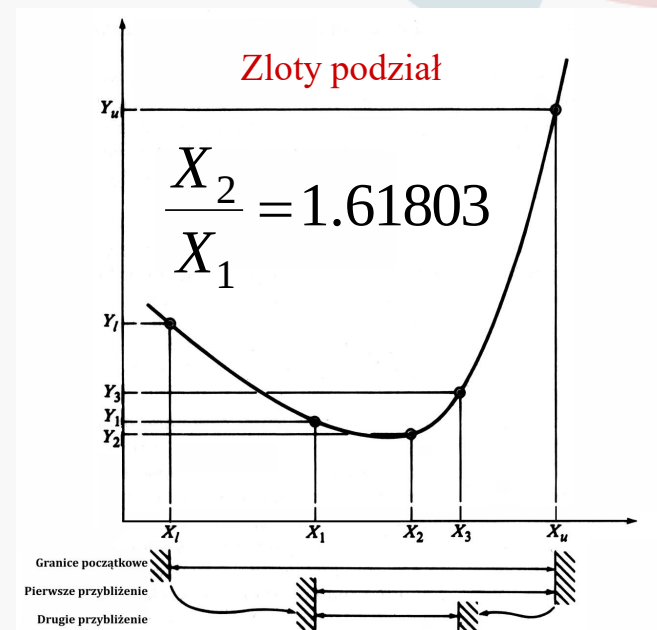
Po rozwiązaniu równania kwadratowego otrzymujemy dwa pierwiastki:

$$X_1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = 0.38197; 2.61803$$

Drugie rozwiązanie odrzucamy gdyż jest większe od górnej granicy X_U . Pozostawiamy rozwiązanie mniejsze od 1 (X_1) natomiast X_2 uzyskujemy z wcześniejszych założeń.

$$X_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.38197$$

$$X_2 = 1 - X_1 = 0.61803$$



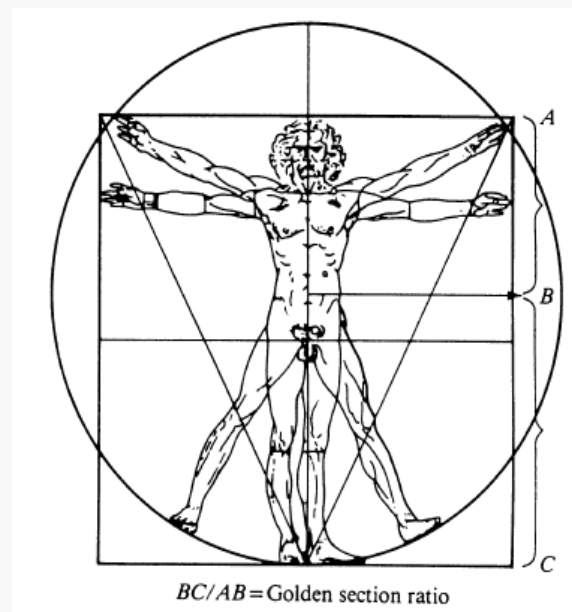


W ten sposób wyznaczamy „Złoty podział”:

$$\frac{X_2}{X_1} = 1.61803$$

Pozostałe właściwości „Złotego podziału”:

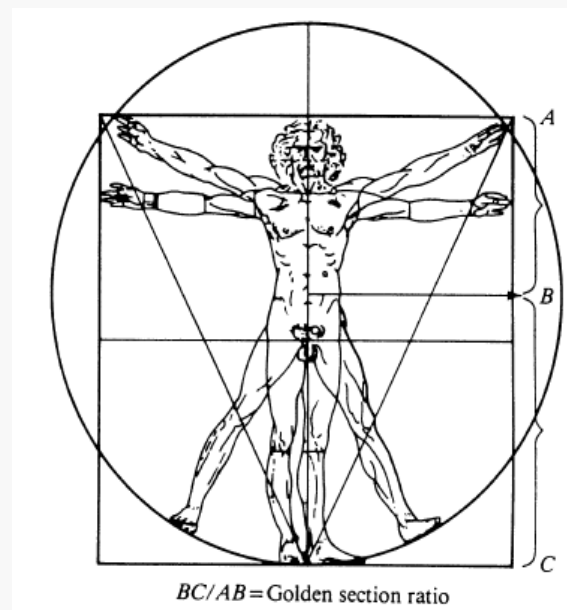
$$\frac{X_1}{X_2} = 0.61803 = X_2 = \frac{X_2}{X_1} - 1 \text{ oraz } X_1 = X_2^2$$

 X_1 X_2



Algorytm minimalizacji funkcji $F(x)$ metodą „Złotego podziału”

1. wybór dolnego i górnego ograniczenia przedziału a i b oraz dokładności ε
2. obliczenie nowych wartości przedziału:
 $w_1 = b - (b-a)/1.61803$
 $w_2 = a + (b-a)/1.61803$
3. zmiana jednej z granic przedziału wg reguły:
if $F(w_1) < F(w_2)$
 $b = w_2$
else
 $a = w_1$
4. powtórzenie kroków 2 i 3 aż do uzyskania warunku $(b-a) < \varepsilon$





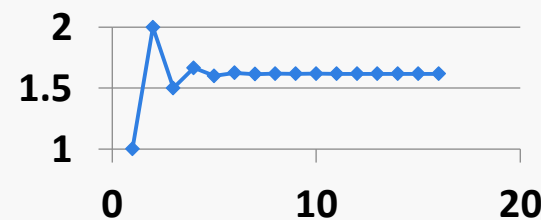
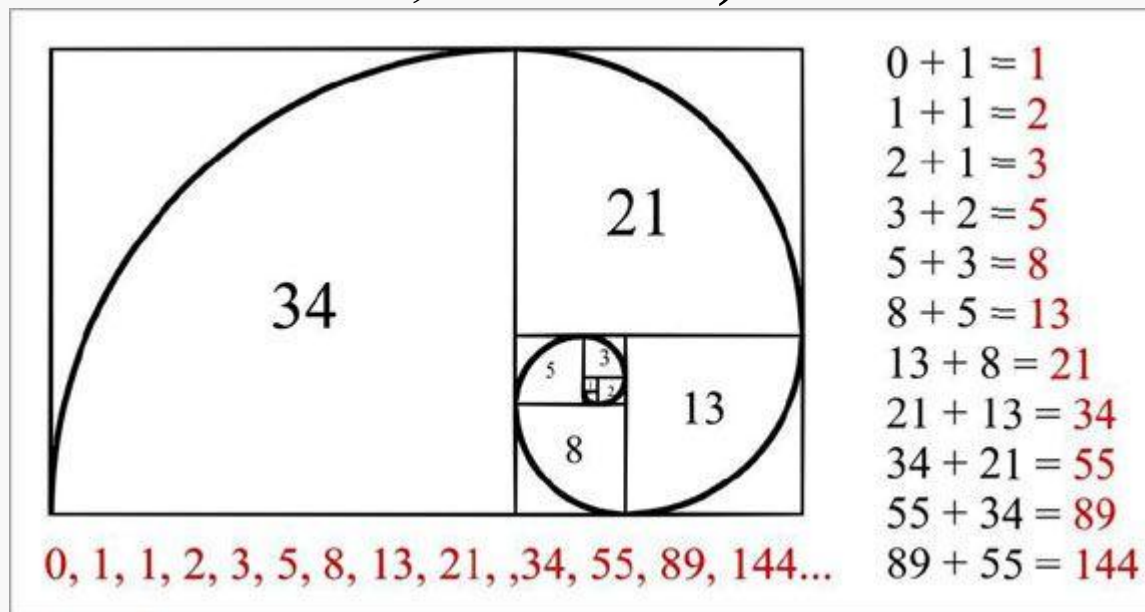
Ciąg Fibonacciego (Leonardo Fibonacci, 1170-1250)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{X_{n-1}} = 1.61803$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]^n - \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right]^n \right)$$





- ustalamy przedział $[a, b]$:
$$L = b - a$$
- dla zadanej dokładności ε poszukujemy najmniejszej liczby z ciągu Fibonacciego takiej, że:
$$\phi_k \geq \frac{L}{\varepsilon}$$

- zawężamy przedział do $[c, d]$ tak, że: $b - d = c - a$

$$c = b - \beta(b - a)$$

$$\beta = \frac{\phi_{k-i-1}}{\phi_{k-i}}$$

- gdzie: i – numer iteracji, k – numer wyrazu ciągu Fibonacciego



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{X_{n-1}} = 1.61803$$

ZŁOTY PODZIAŁ



Algorytm minimalizacji funkcji $F(x)$ metodą Fibonacciego ($\phi(k)$ – wartość ciągu dla k -tego wyrazu)

1. wybór dolnego i górnego ograniczenia przedziału a i b oraz dokładności ε
2. wyznaczenie długości ciągu poprzez znalezienie najmniejszego wyrazu (n -tego) większego od $(b-a)/\varepsilon$

3. przyjęcie $k = 1$ i wyznaczenie $\rho(k) = \phi(n-k-1)/\phi(n-k)$

4. obliczenie nowych wartości przedziału:

$$w_1 = b - (b-a) \rho(k)$$

$$w_2 = a + (b-a) \rho(k)$$

5. zmiana jednej z granic przedziału wg reguły:

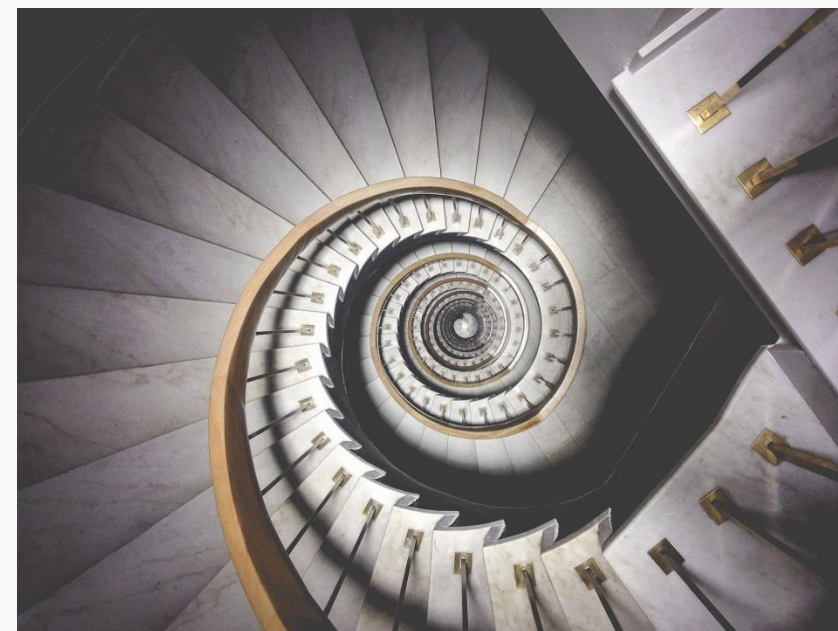
$$\text{if } F(w_1) < F(w_2)$$

$$b = w_2$$

else

$$a = w_1$$

6. zwiększenie k o jeden i wyznaczenie nowej wartości $\rho(k)$
7. powtórzenie kroków 4 i 6 aż do uzyskania warunku $k=n$

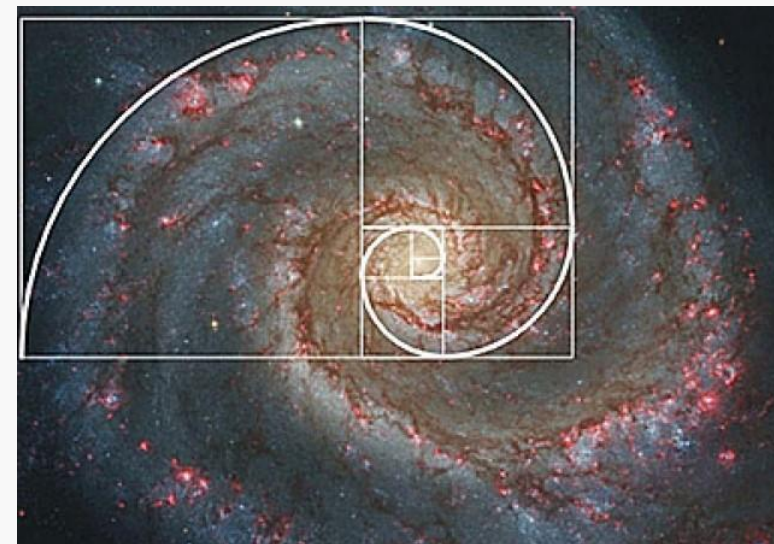




OMNIS

Ciąg Fibonacciego w przyrodzie

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



OMNIS

Funkcja jednej zmiennej w obecności więzów (1/6)

CEL

Poszukiwanie minimum funkcji $F(X)$ przy jednoczesnym spełnieniu warunków wynikających z istnienia więzów.

Przykład ilustrujący zagadnienie:

Znaleźć minimum funkcji $F(X)$ przy jednoczesnym spełnieniu warunków:

$$g_j(X) \leq 0 \text{ dla } j = 1, m;$$

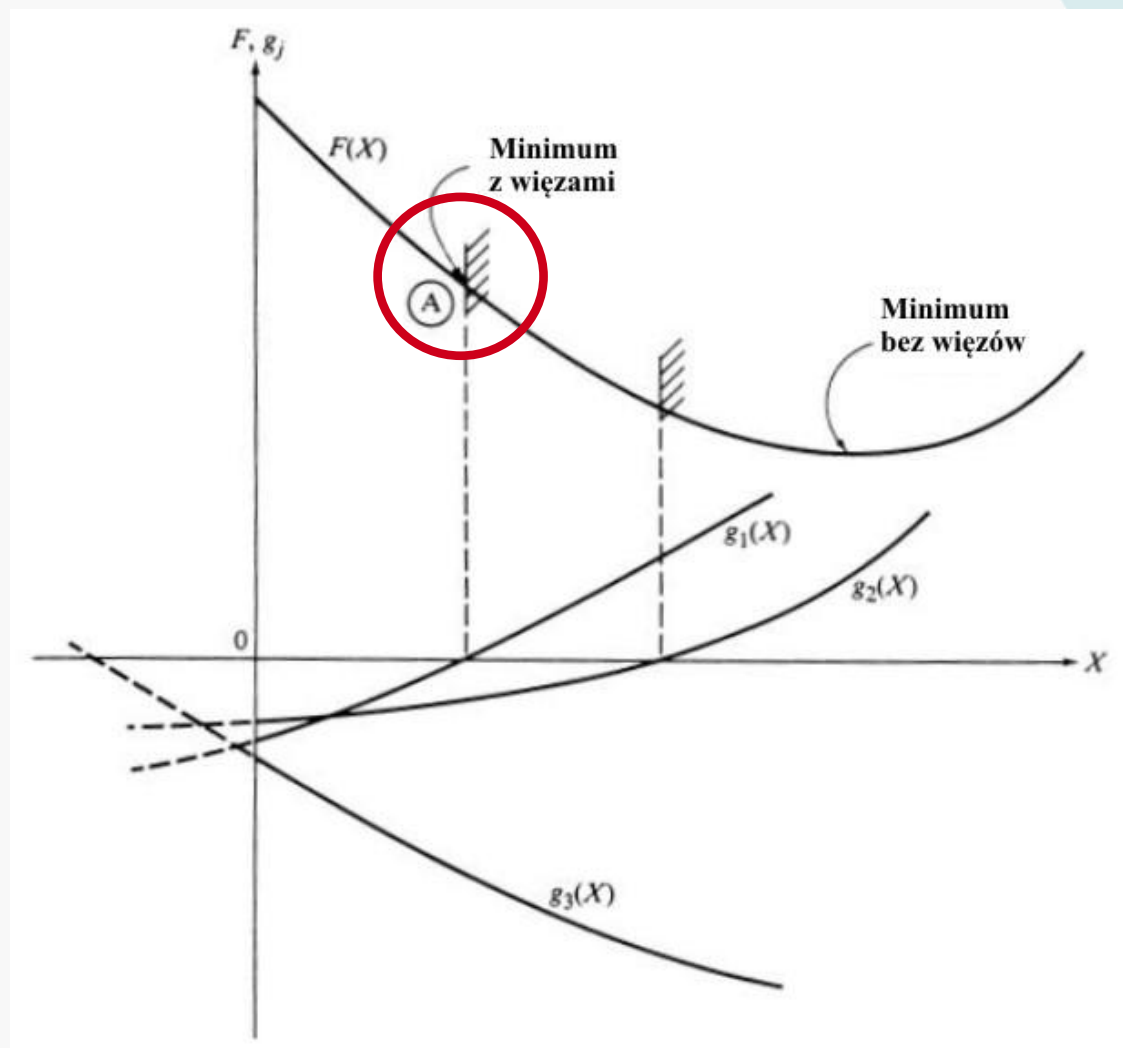
gdzie:

F i g_j funkcjami zmiennej X

**CEL:**

Poszukiwanie minimum funkcji $F(X)$ przy jednoczesnym spełnieniu warunku ujemnej wartości innych funkcji tej samej zmiennej $g_i(X)$.

Punkt A spełnia powyższe założenia





Podejście bezpośrednie (The Direct Approach)

- Metoda polega na rozważaniu każdej funkcji indywidualnie.
- Podejście jest inne dla aproksymacji wielomianem i metody złotego podziału
- Punkt wyjścia - wyznaczenie ograniczeń rozwiązania





Podejście pośrednie (The Indirect Approach)

Zamiana problemu na zagadnienie bez więzów

$$\tilde{F} = F + R \sum_{j=1}^m \delta_j (g_j)^2$$

gdzie:

$$\delta_j = 0 \quad \text{dla } g_j \leq 0$$

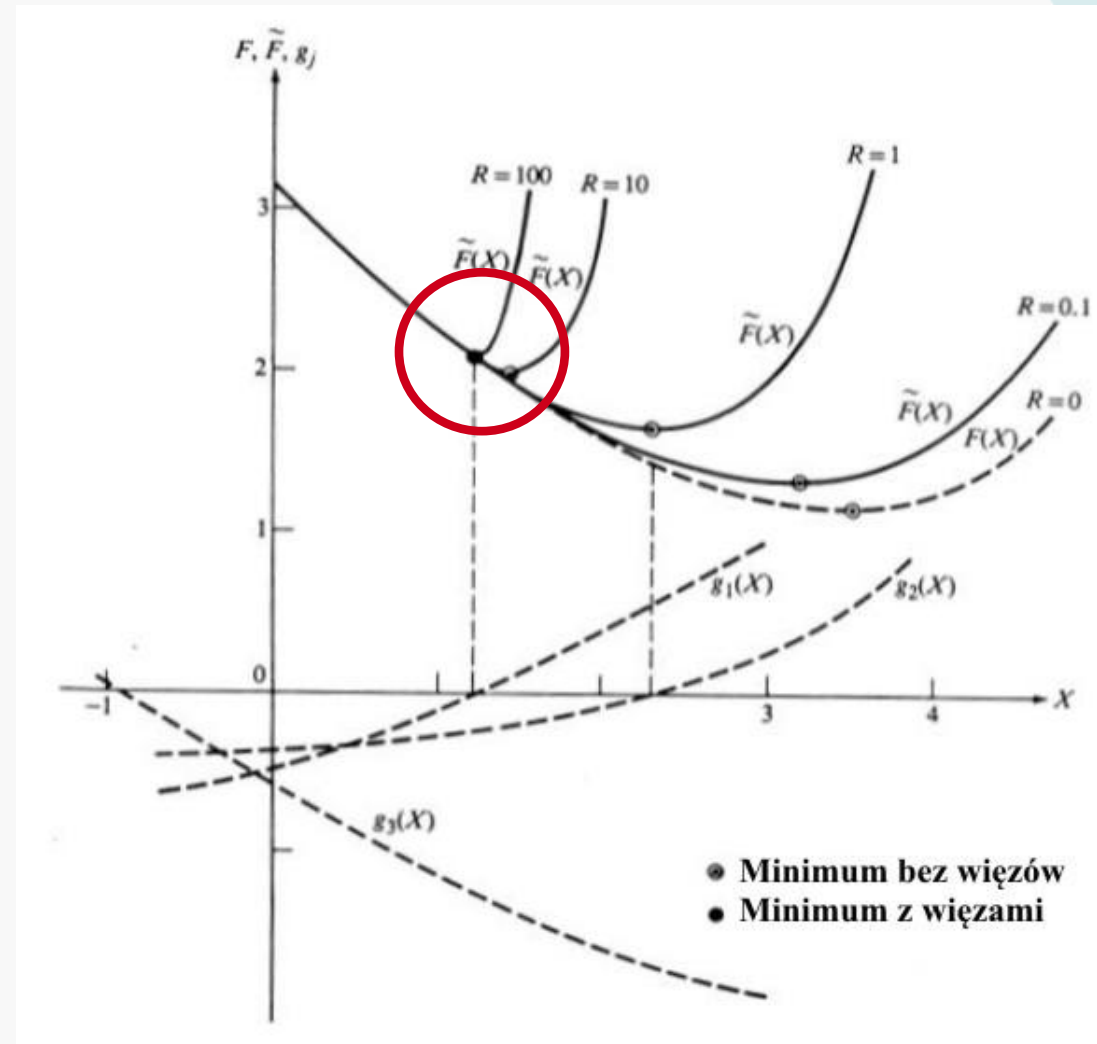
$$\delta_j = 1 \quad \text{dla } g_j > 0$$

R – parametr kary;



Funkcja jednej zmiennej w obecności więzów (5/6)

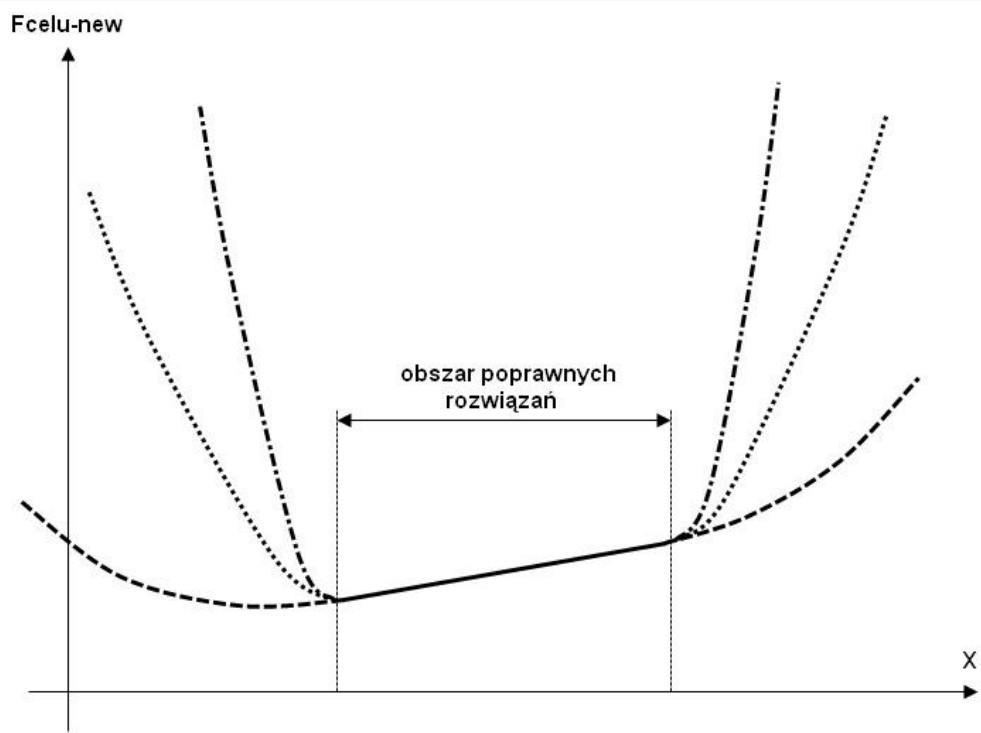
Przykłady dla różnych współczynników kary R ($R=0$ – bez więzów)



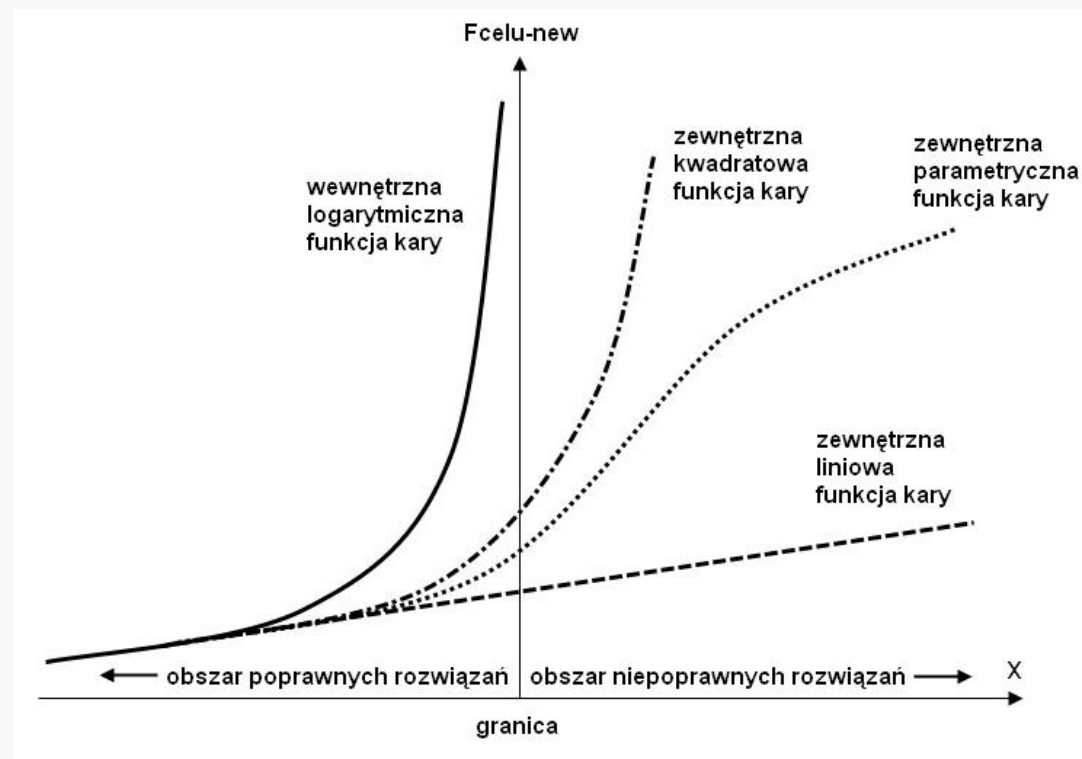


Podejście pośrednie (The Indirect Approach)

Zastosowanie funkcji kary



$$F_{\text{CELU_NEW}} = F_{\text{CELU}} + F_{\text{KARA}}$$





OMNIS Optymalizacja w inżynierii lotniczej i kosmicznej

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

Dziękuję za uwagę



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska