



OMNIS

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

Optymalizacja w inżynierii lotniczej i kosmicznej

Wykład 5 Matematyczne podstawy optymalizacji 4

1130-LK000-MSP-1037



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



OMNIS

Zagadnienia

- Metoda Newtona – Przykłady
- Stabilność algorytmów
- Obliczanie wartości funkcji
- Uwarunkowanie zadań
- Zbieżność algorytmu rozwiązującego równanie nieliniowe
- Skalowanie zmiennych





OMNIS Generalna strategia optymalizacji

Traktujemy algorytm optymalizacyjny jako algorytm iteracyjny:

$$\mathbf{X}^q = \mathbf{X}^{q-1} + \alpha^* \mathbf{S}^q$$

gdzie:

$\mathbf{X}^q$ – macierz kolumnowa zmiennych w q -tej iteracji;

$\mathbf{X}^{q-1}$ – macierz kolumnowa zmiennych w $q-1$ -szej iteracji;

q – numer iteracji;

$\mathbf{S}^q$ – wektor kierunku poszukiwań;

α^* – odległość w kierunku wektora $\mathbf{S}$ którą zamierzamy przebyć w q -tej iteracji;



OMNIS Metoda Newton'a (1/9)

Jest to klasyczna metoda drugiego rzędu wyprowadzana z szeregu Taylor'a:

$$F(X) \approx F(X^q) + \nabla F(X) \cdot \delta X + \frac{1}{2} \delta X^T \cdot H(X^q) \cdot \delta X$$

gdzie:

H - Hesjan

$$\delta X = X^{q+1} - X^q$$

$$\delta X = -[H(X^q)]^{-1} \nabla F(X^q)$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_1 \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_2 \partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_n \partial X_1} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_n \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_n^2} \end{bmatrix}$$





Wymagania dla metody są następujące:

- Funkcja $F(X)$ jest klasy C^2 czyli funkcja jest ciągła i podwójnie różniczkowalna,
- $F(X)$ jest ściśle wypukła w badanej dziedzinie





OMNIS Metoda Newton'a (3/9)

$$X^{q+1} = X^q + \delta X = X^q - [H(X^q)]^{-1} \nabla F(X^q)$$

Po porównaniu powyższego równania z generalną strategią optymalizacji $\mathbf{X}^q = \mathbf{X}^{q-1} + \alpha_q^* \mathbf{S}^q$ i założeniu $\alpha^*=1$ otrzymujemy:

$$\mathbf{S}^q = -[H(X^q)]^{-1} \nabla F(X^q)$$

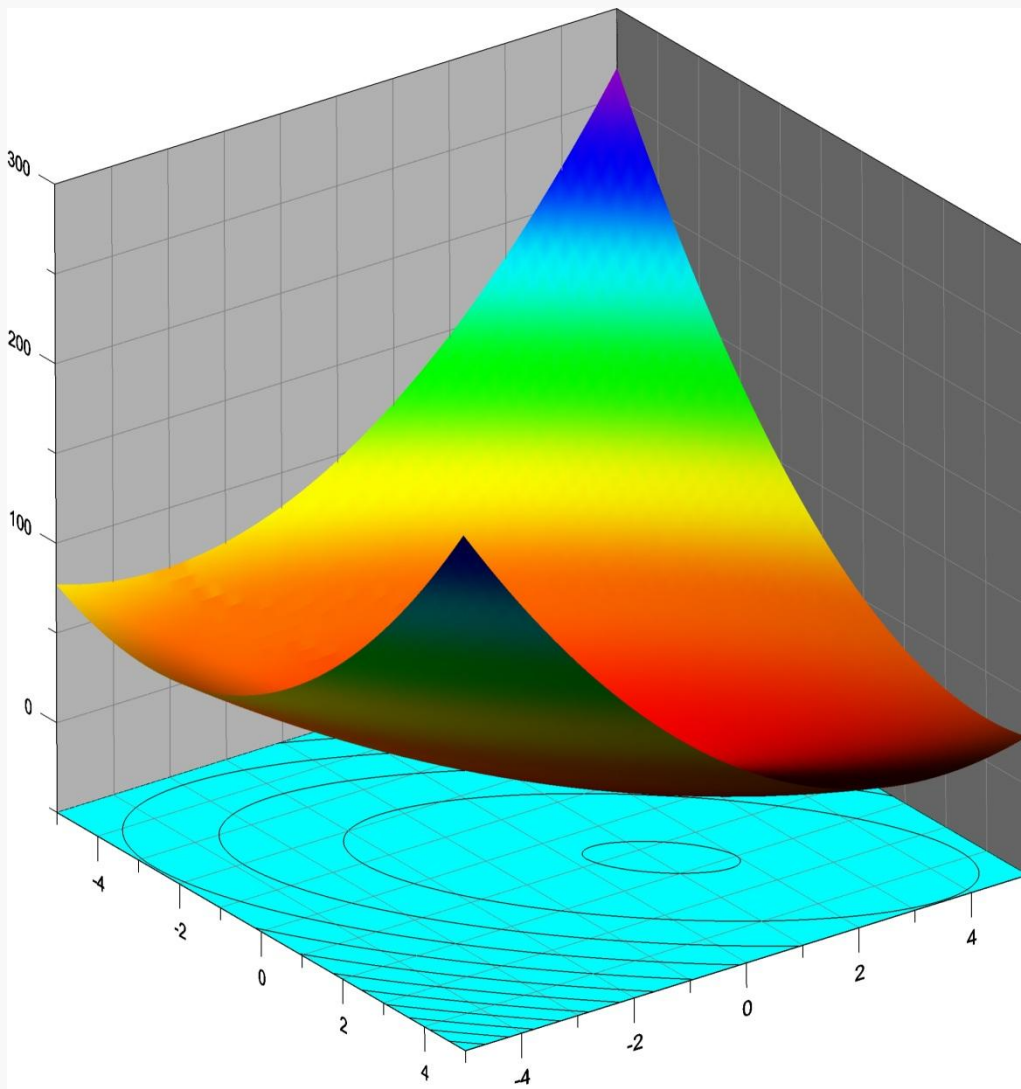




OMNIS

Metoda Newton'a (4/9)

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



Przykład nr 1 - Weźmy funkcję:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1(1 + x_2) - x_2 + 2$$



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



OMNIS Metoda Newton'a (5/9)

$$S^q = \mathbf{d}^{(q)} = \left[-H(\mathbf{x}^{(q)}) \right]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^{(q)})$$

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1(1 + x_2) - x_2 + 2$$

Dla tak określonej funkcji f obliczamy gradient i hesjan:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 4(1 + x_2) \\ -1 - 4x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}, \quad H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Jako punkt startowy wybieramy $\mathbf{x}^{(0)} = (10, 4)$ i wykonujemy kolejne kroki algorytmu:

$$\nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 40 \\ -17 \end{bmatrix},$$

$$H^{-1}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 \end{bmatrix},$$



OMNIS Metoda Newton'a (6/9)

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1(1 + x_2) - x_2 + 2$$

$$\mathbf{d}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,6 \\ -2,9 \end{bmatrix},$$

$$h^{(1)} = 1,$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8,6 \\ -2,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 1,1 \end{bmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\nabla f(1,4; 1,1) = [0 \ 0]^T$, zatem osiągnęliśmy warunek stopu (algorytm musi zakończyć działanie, gdy gradient się zeruje lub hesjan jest macierzą nieodwracalną). Zwróćmy uwagę, że funkcję f można zapisać również wzorem:

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2,$$

czyli w postaci:

$$f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c.$$

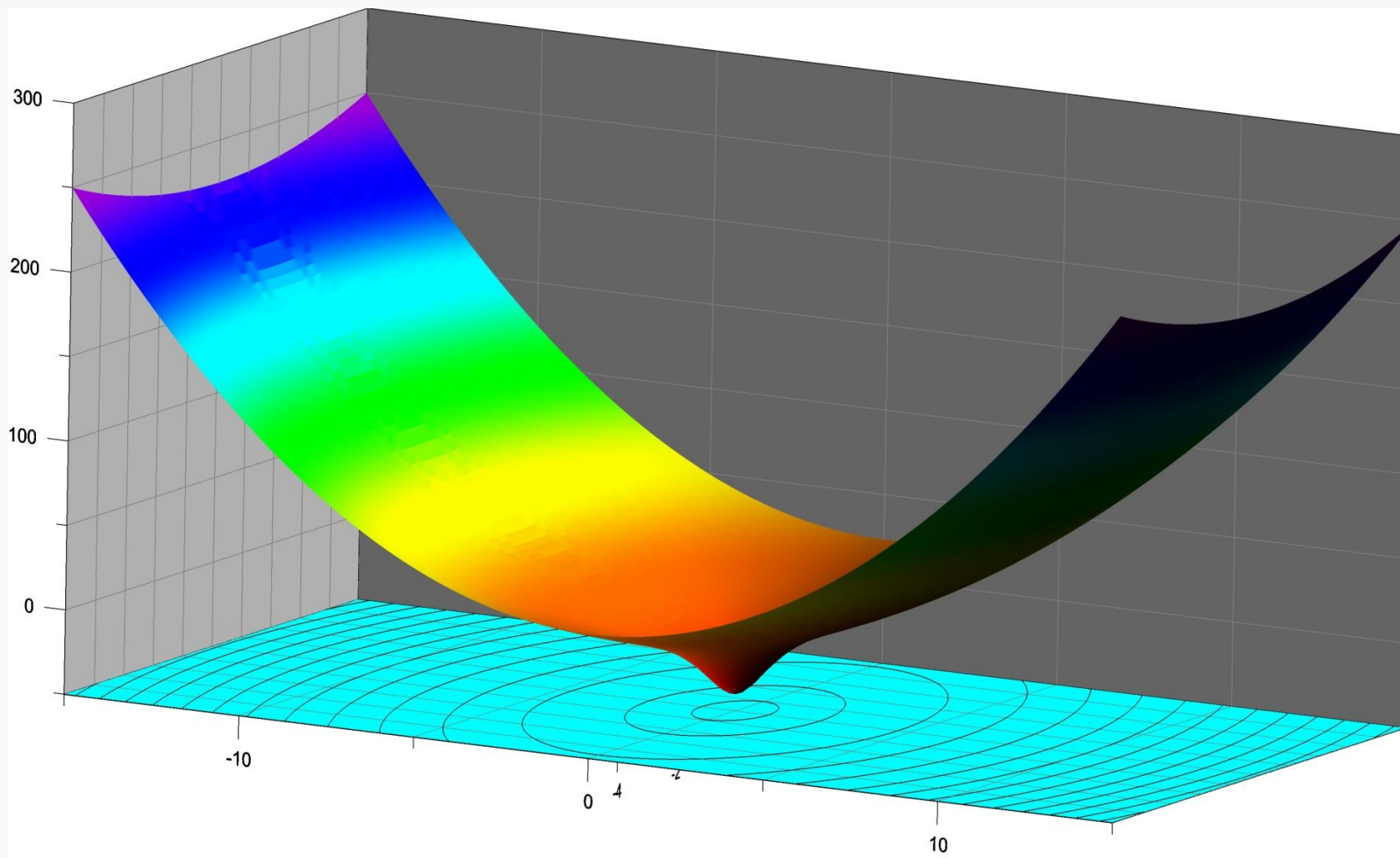
Dla funkcji tej postaci metoda Newtona zawsze znajduje rozwiązanie w jednym kroku



OMNIS

Metoda Newton'a (7/9)

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



Przykład nr 2:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{40}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$$

Rozwiązanie:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



OMNIS Metoda Newton'a (8/9)

Poszukujemy minimum funkcji

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{40}{x_1^2 + x_2^2 + 1},$$

stosując metodę Newtona przy założeniu, że $\mathbf{x}^{(0)} = (10, 4)$ oraz $\varepsilon = 0,01$. W kolejnych iteracjach otrzymujemy $\mathbf{x}^{(1)} = (0,0016; -0,004)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0,0014; 0,00007)$. W tym momencie algorytm kończy działanie, gdyż $\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_2 < \varepsilon$. Wartość funkcji celu w otrzymanym punkcie $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(2)}$ wynosi $f(\mathbf{x}^*) \approx -39,9999$. Rzeczywiste minimum funkcji f znajduje się w punkcie $\mathbf{x}^{\min} = (0, 0)$ i wynosi $f(\mathbf{x}^{\min}) = -40$. Kolejne iteracje metody przedstawiono na rysunku

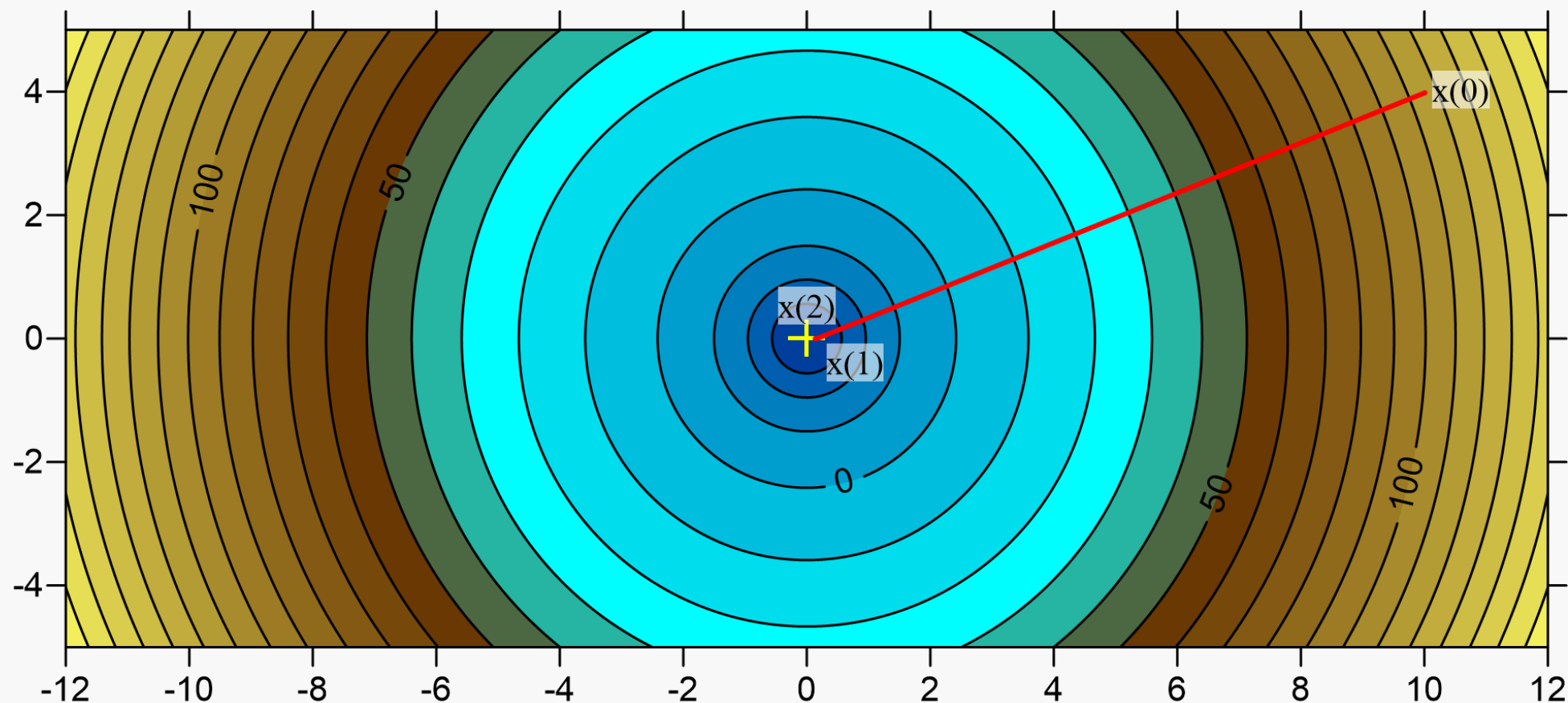




OMNIS Metoda Newton'a (9/9)

Przykład nr 2 – kolejne iteracje:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{40}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$$





OMNIS

Błędy obliczeń numerycznych

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

Rodzaje i źródła błędów

- błędy modelu
- błędy danych
- błędy zastosowanej metody
- błędy reprezentacji liczb
- błędy akumulowane



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



Błędy modelu:

- model matematyczny jest przybliżeniem zjawiska fizycznego, które opisuje
- przybliżenie wynika z:
 - uproszczenia modelu fizycznego
 - możliwości obserwacji/pomiarów (np. założenie stałości masy w II Prawie Newtona)



OMNIS

Błędy obliczeń numerycznych

Błędy danych wejściowych (reprezentacji):
wynikają z faktu, że dane dostarczane do programu są już obciążone niepewnością (np. z pomiarów) lub nie mogą być dokładnie zapisane w systemie dwójkowym (np. liczba π lub ułamki takie jak 0.1)





OMNIS

Błędy obliczeń numerycznych

Błędy zastosowanej metody:
powstają, gdy nieskończony proces matematyczny zastępujemy skończonym algorytmem. Przykładem jest przybliżenie szeregu nieskończonego sumą kilku początkowych wyrazów lub zastąpienie pochodnej ilorazem różnicowym, przybliżenie procesem aproksymacji czy interpolacji, itp.





Błędy reprezentacji liczb: wynikają z ograniczonej precyzji komputerów (np. 32/64 bity), co uniemożliwia zapisanie liczb niewymiernych lub o zbyt długiej mantysie, zmuszając do ich zaokrąglania.

Główne aspekty błędów reprezentacji:

- Błędy zaokrągleń: Występują, gdy komputer musi zmieścić liczbę w ograniczonej liczbie bitów (np. typ double przechowuje ok. 15-17 cyfr dziesiętnych). Powoduje to, że liczby takie jak 0.1 (w systemie dziesiętnym) są w binarnym systemie zmiennoprzecinkowym przybliżane.
- Błędy obcięcia: Powstają przy zastępowaniu procesów nieskończonych skończonymi, np. przy obliczaniu całek, szeregów czy funkcji za pomocą rozwinięcia Taylora, co jest niezbędne w procedurach numerycznych.
- Ograniczenia systemu binarnego: Komputery przechowują dane w systemie dwójkowym, co oznacza, że wiele ułamków dziesiętnych nie ma skończonej reprezentacji binarnej i musi zostać zaokrąglonych



OMNIS

Błędy obliczeń numerycznych

Błędy akumulowane: to efekt nawarstwiania się błędów z poszczególnych etapów obliczeń, co może prowadzić do znacznej utraty dokładności w długich algorytmach

Ze zjawiskiem akumulacji i przenoszenia błędów związane są pojęcia:

- numeryczna stabilność algorytmu
- uwarunkowanie zadania





Numeryczna stabilność algorytmu: odporność na błędy reprezentacji liczb (danych).

Przykład: rozpatrzmy dwa równoważne formalnie algorytmy obliczenia wartości funkcji:

Dane: liczba dodatnia a oraz liczba $\Delta a \leq a$

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(a, \Delta a) = \sqrt{a + \Delta a} - \sqrt{a} = \\ &= \left(\sqrt{a + \Delta a} - \sqrt{a} \right) \frac{\sqrt{a + \Delta a} + \sqrt{a}}{\sqrt{a + \Delta a} + \sqrt{a}} = \\ &= \frac{\Delta a}{\sqrt{a + \Delta a} + \sqrt{a}} = f_2(a, \Delta a) = y_2 \end{aligned}$$

Niech $a = 3$, $\Delta a = 0.01$



Wyniki:

Przybliżone wartości pierwiastków		$y_1 = \sqrt{3.01} - \sqrt{3}$	$y_2 = \frac{0.01}{\sqrt{3.01} + \sqrt{3}}$
$\sqrt{3.01}$	$\sqrt{3}$		
1.7	1.7	0	0.002941
1.73	1.73	0	0.002890
1.735	1.732	0.003	0.002884
1.7349	1.7321	0.0028	0.002884
1.73494	1.73205	0.00289	0.002884
1.734935	1.732051	0.002884	0.002884

algorytm niestabilny

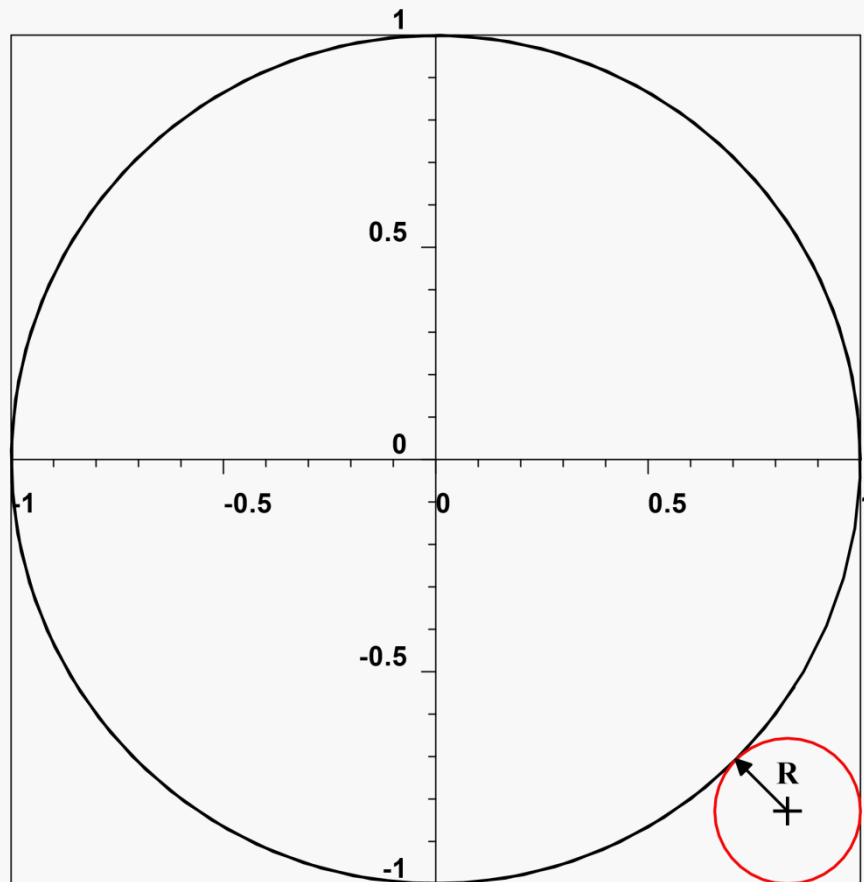
algorytm stabilny



OMNIS

Numeryczna stabilność algorytmu

Przykład: obliczenie objętości kuli wpisanej między kulę o promieniu jednostkowym a ścianki opisującego sześcianu:



Promień **R** jest równy:

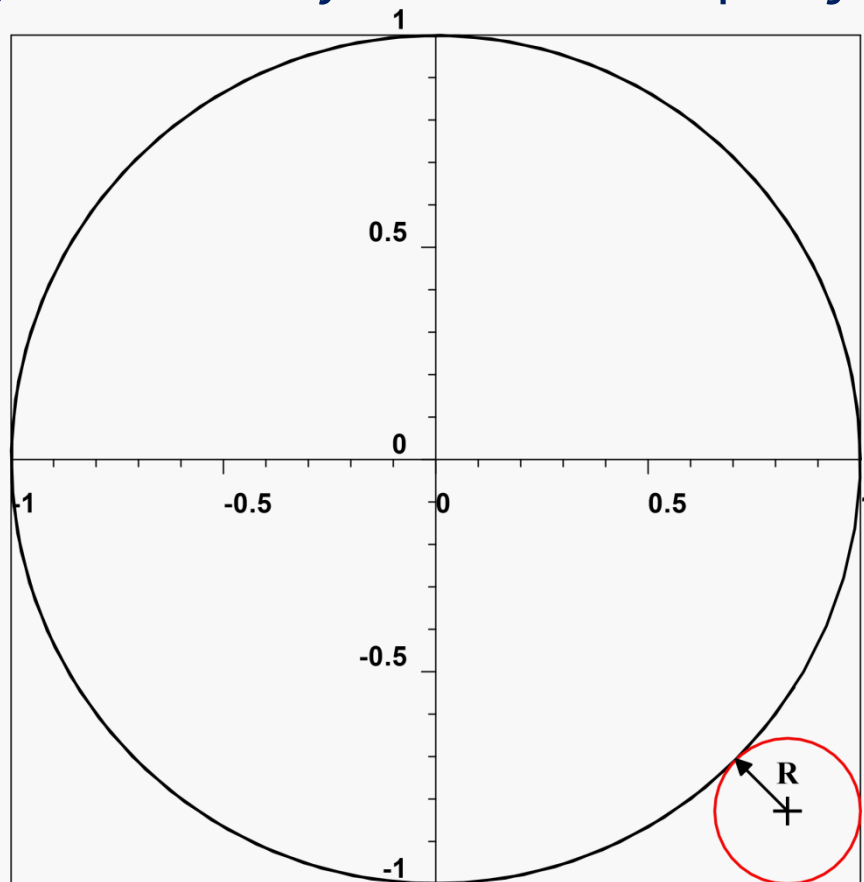
$$R = (\sqrt{2} - 1) / (\sqrt{2} + 1)$$

Objętość kuli:

$$V = 4 / 3 \pi R^3$$



Przykład: obliczenie objętości kuli wpisanej między kulę o promieniu jednostkowym a ścianki opisującego sześcianu:



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad R = (\sqrt{2} - 1) / (\sqrt{2} + 1)$$

$$V1 = 4\pi((\sqrt{2} - 1) / (\sqrt{2} + 1))^3 / 3$$

$$V2 = 4\pi(\sqrt{2} - 1)^6 / 3$$

$$V3 = 4\pi / (\sqrt{2} + 1)^6 / 3$$

$$V4 = 4\pi(99 - 70\sqrt{2}) / 3$$

$$V5 = 4\pi / (99 + 70\sqrt{2}) / 3$$

po pomnożeniu licznika
i mianownika (R) przez
licznik (V2) lub mianownik (V3)

po rozpisaniu wyrażenia
w nawiasie z V2 i V3



OMNIS

Numeryczna stabilność algorytmu

Wyniki:

algorytm niestabilny

algorytm stabilny

$\sqrt{2}$	precyzja	V1	V2	V3	V4	V5
1	0	0	0	0.06545	121.4749	0.024786
1.4	1	0.019393	0.017157	0.021919	4.18879	0.021263
1.41	2	0.020625	0.019897	0.021379	1.256637	0.021188
1.414	3	0.021129	0.021091	0.021167	0.083776	0.021158
1.4142	4	0.021154	0.021152	0.021157	0.025133	0.021156
1.41421	5	0.021156	0.021155	0.021156	0.022201	0.021156
1.414214	6	0.021156	0.021156	0.021156	0.021028	0.021156
1.4142136	pełna	0.021156	0.021156	0.021156	0.021156	0.021156



OMNIS

Obliczanie wartości funkcji

Jeżeli bezpośrednio obliczenie wartości funkcji jest niemożliwe lub zbyt pracochłonne, powstaje zagadnienie aproksymacji, czyli najlepszego w sensie nałożonych wymagań przybliżenia funkcji

Funkcję $f(x)$ można rozwinąć w zbieżny szereg funkcyjny

$$f(x) \approx \sum_{i=k}^{\infty} a_i u_i(x) \quad \text{dla} \quad x \in \langle a, b \rangle$$





OMNIS

Obliczanie wartości wielomianu

Algorytm Hornera

Obliczanie wartości wielomianu o danych współczynnikach $a_0, a_1, \dots, a_n$, w danym punkcie x , bezpośrednio według wzoru

$$W_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

wymaga wykonania $n(n+1)/2$ mnożeń i n dodawań





OMNIS

Obliczanie wartości wielomianu

Algorytm Hornera

Wzór określający $W_n(x)$ można przekształcić do postaci zwanej schematem Hornera obliczania wartości wielomianu przez kolejne mnożenia, co wymaga n mnożeń i n dodawań

$$W_n(x) = (...((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x ... + a_1)x + a_0$$

Działania wykonuje się w następującej kolejności:

$$w_0 = a_n$$

$$w_i = w_{i-1}x + a_{n-i} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

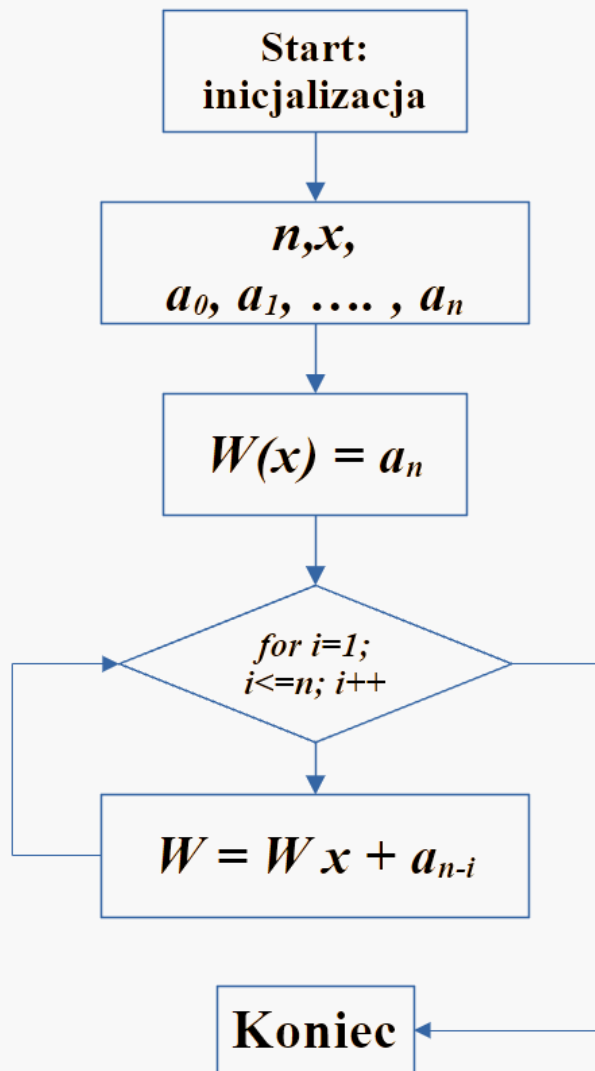
$$W_n(x) = w_n$$



OMNIS

Obliczanie wartości wielomianu

Schemat algorytmu Hornera
do obliczania wartości wielomianu

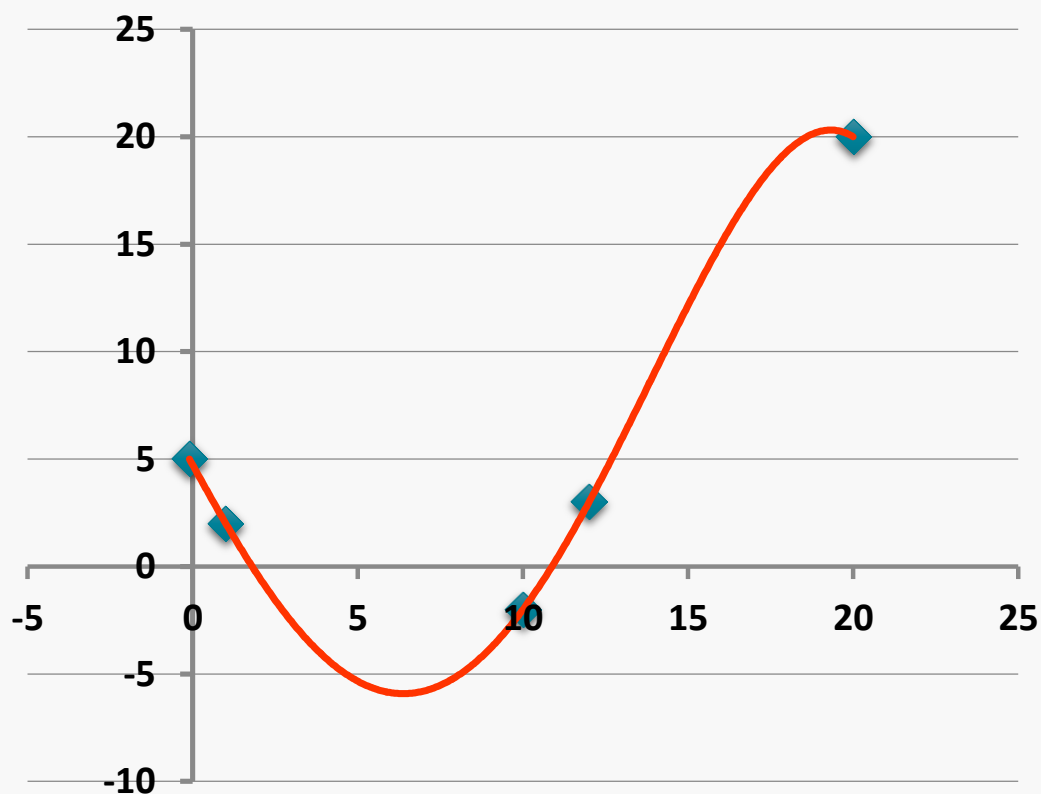




OMNIS

Niestabilność obliczeń wartości wielomianu

$$y = -0.0010x^4 + 0.0257x^3 + 0.0529x^2 - 2.7974x + 4.7198$$



Przykład danych do wyznaczenia współczynników wielomianu aproksymującego czwartego rzędu

x	y
-0.1	5
1	2
10	-2
12	3
20	20



OMNIS

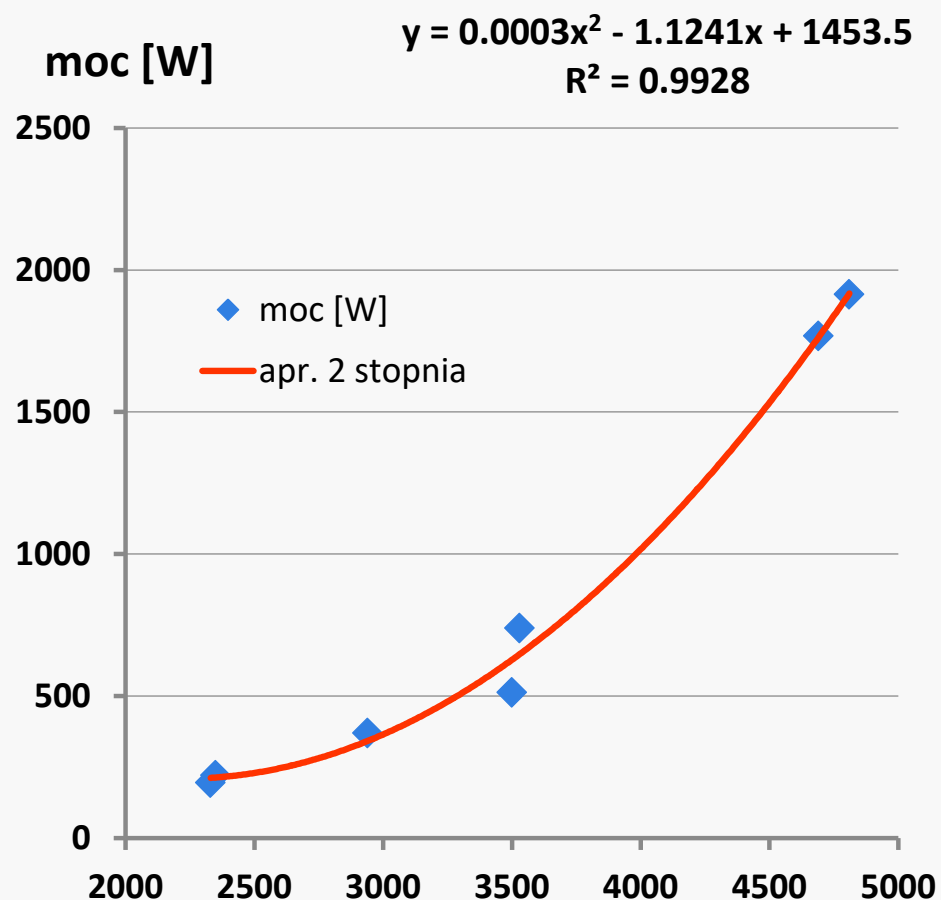
Niestabilność obliczeń wartości wielomianu

Współczynniki wielomianu aproksymującego czwartego rzędu zapisane z różną precyzją (2-7 miejsc po kropce dziesiętnej)

	2m	3m	4m	5m	6m	7m
A4	0.00	-0.001	-0.0010	-0.00097	-0.000970	-0.0009704
A3	0.03	0.026	0.0257	0.02566	0.025664	0.0256640
A2	0.05	0.053	0.0529	0.05294	0.052939	0.0529388
A1	-2.80	-2.797	-2.7974	-2.79739	-2.797390	-2.7973898
A0	4.72	4.720	4.7198	4.71976	4.719757	4.7197574

Wartości wielomianu w węzłach

x	y	2m	3m	4m	5m	6m	7m
-0.1	5	5.00047	5.000204	5.000043	5.000003	5	5
1	2	2	2.001	2	2	2	2
10	-2	11.72	-1.95	-2.2642	-2.00014	-1.99624	-2.000261
12	3	30.16	2.98	2.4422	3.001	3.007765	2.9994446
20	20	208.72	17.98	15.5318	20.02796	20.05956	19.995481



Przykład danych do wyznaczenia współczynników wielomianu aproksymującego drugiego rzędu: wyniki pomiaru mocy na wale

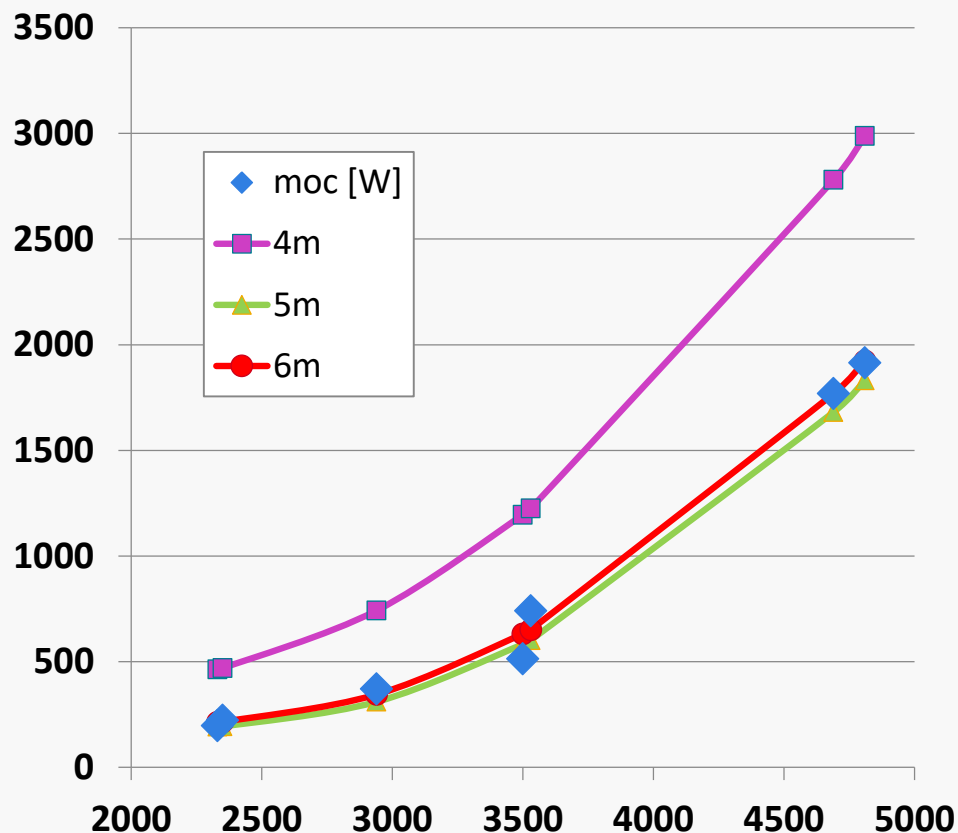
n [obr/min]	moc [W]
2330	195
2350	221
2940	369
3500	513
3530	739
4690	1768
4810	1914



OMNIS

Niestabilność obliczeń wartości wielomianu

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



Wyniki aproksymacji dla współczynników zapisanych z różną precyzją (4-6)

n [obr/min]	moc [W]	4m	5m	6m
2330	195	463	192	213
2350	221	469	193	215
2940	369	742	310	344
3500	513	1194	582	631
3530	739	1224	601	651
4690	1768	2780	1681	1769
4810	1914	2987	1831	1923



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



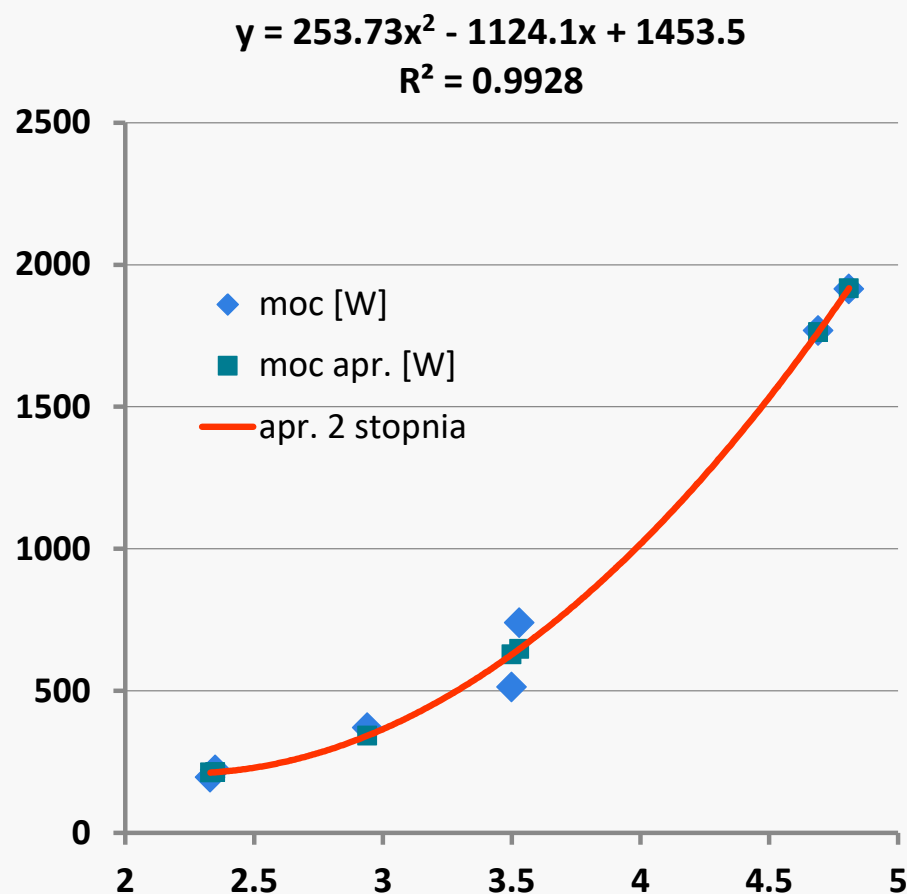
Politechnika Warszawska



OMNIS

Niestabilność obliczeń wartości wielomianu

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



Przykład likwidacji niestabilności obliczeń:
zamiana jednostki obr/min → tys. obr/min

n [tys. obr/min]	moc [W]	moc apr. [W]
2.33	195	212
2.35	221	213
2.94	369	342
3.50	513	627
3.53	739	647
4.69	1768	1763
4.81	1914	1917



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



Zadania, w których bardzo małe względne zaburzenia powodują stosunkowo wielkie zmiany rozwiązania nazywamy: zadaniem źle uwarunkowanym.

Przykład:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 2x + 6.00001y = 8.00001 \end{cases}$$

rozwiązanie: $x = 1, y = 1$

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 2x + 5.99999y = 8.00002 \end{cases}$$

rozwiązanie: $x = 10, y = -2$

zmiany nie są błędami numerycznymi i nie są wynikiem niedokładności

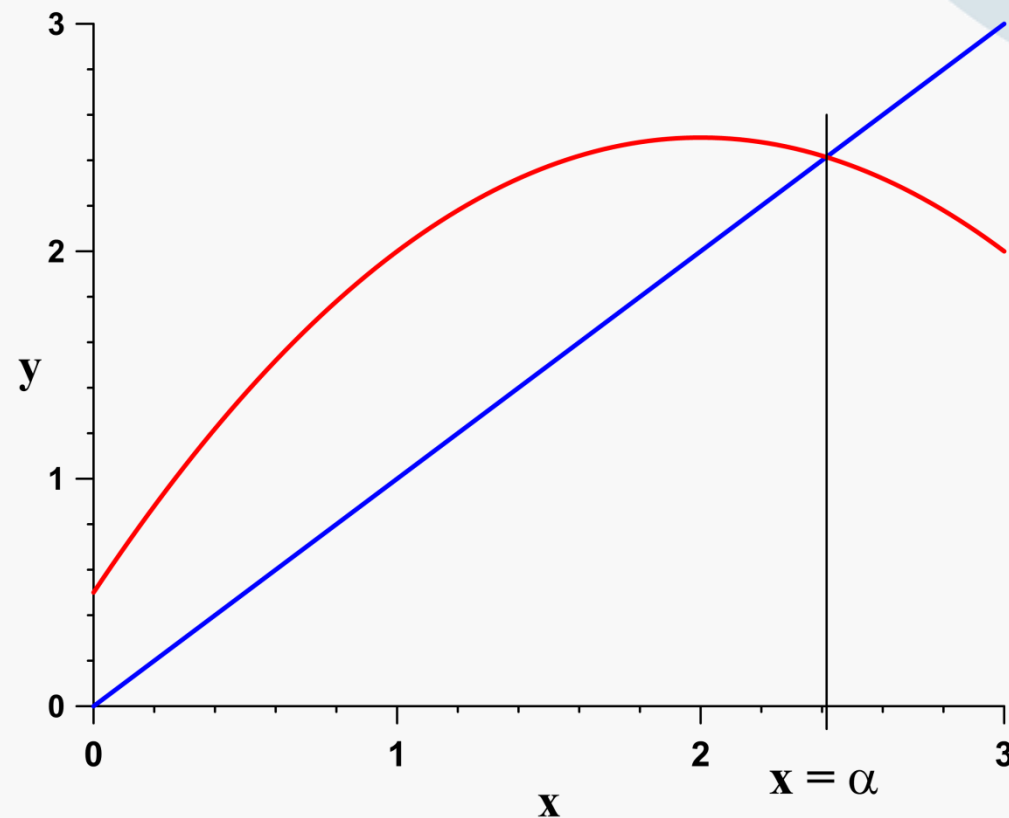


OMNIS

Zbieżność algorytmu - sformułowanie zadania

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

Rozważmy metodę iteracyjną na przykładzie prostego równania nieliniowego $x = F(x)$, które można graficznie zinterpretować następująco



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



Zakładamy x_0 i budujemy ciąg:

$$x_1 = F(x_0) ; x_2 = F(x_1) ; \dots x_{n+1} = F(x_n)$$

Ciąg jest zbieżny do α gdy $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(\alpha)$

Zauważmy, że każde równanie nieliniowe można doprowadzić do postaci $\mathbf{x} = F(\mathbf{x})$. Niech np. będzie równanie $G(\mathbf{x}) = 0$.

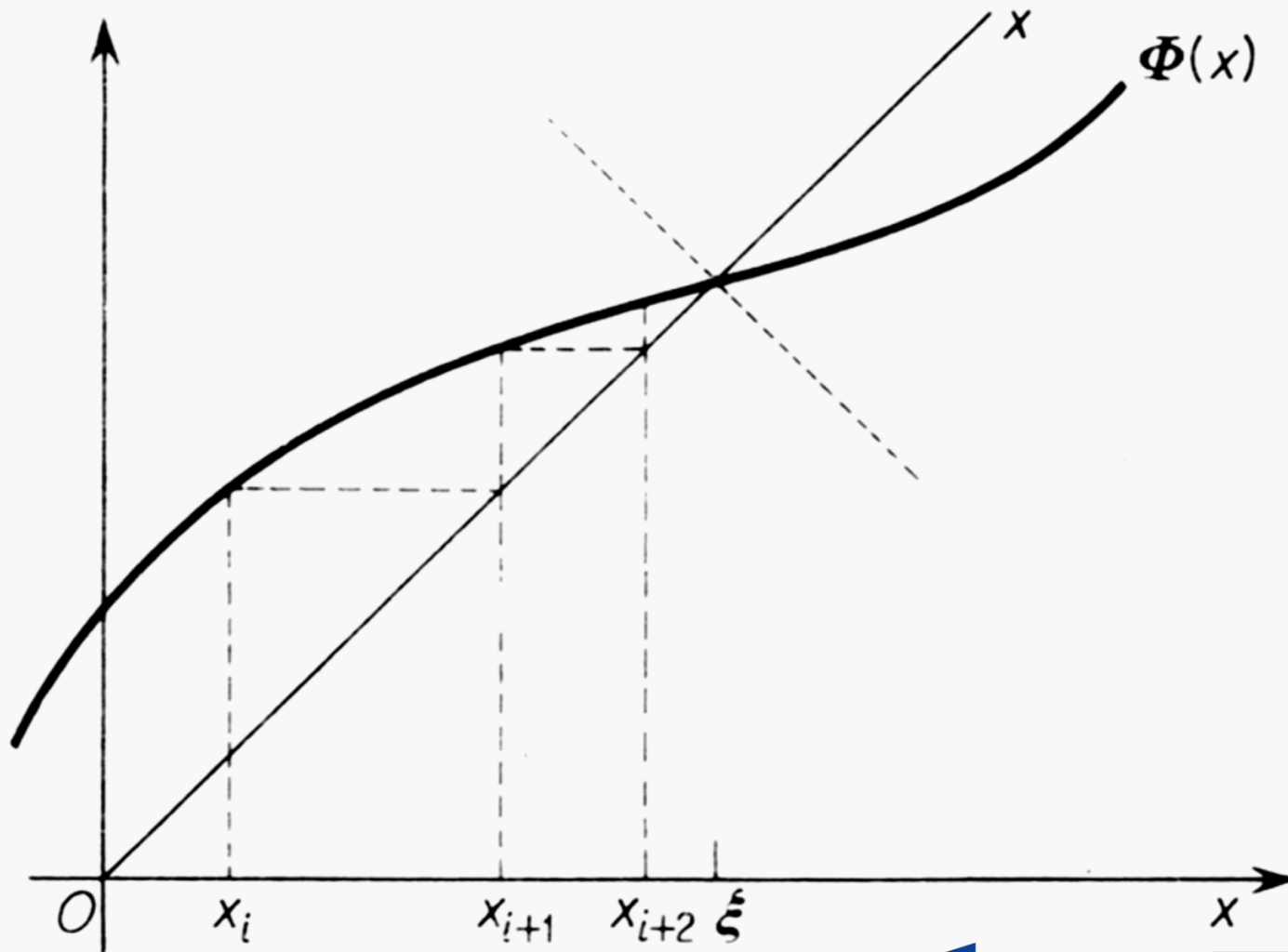
Możemy wtedy podstawić $\mathbf{x} = G(\mathbf{x}) + \mathbf{x} = F(\mathbf{x})$



OMNIS

Zbieżność algorytmu – algorytmy zbieżne

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



$$0 < \Phi'(\xi) < 1$$

zbieżność monotoniczna



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



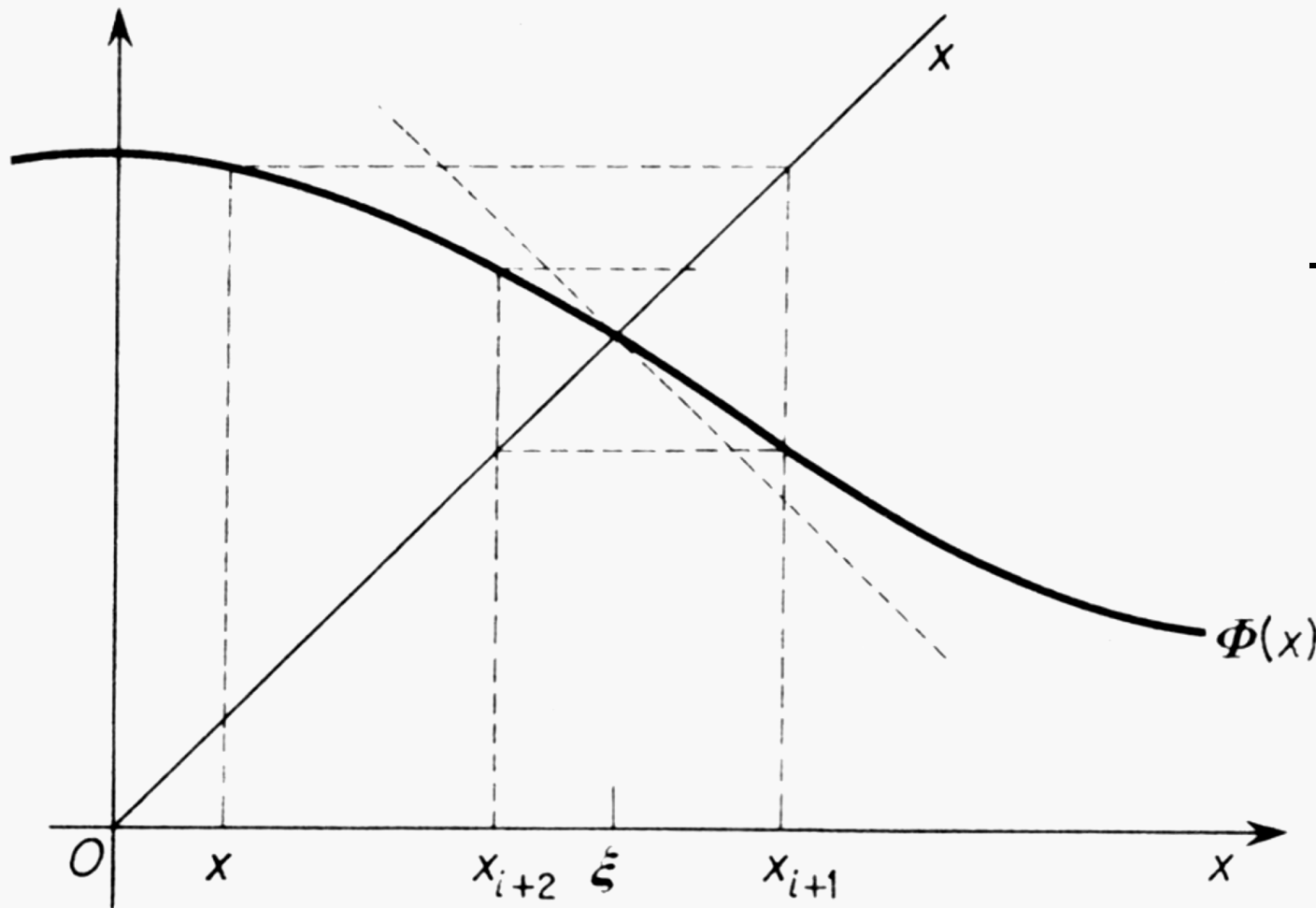
Politechnika Warszawska



OMNIS

Zbieżność algorytmu – algorytmy zbieżne

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



$$-1 < \Phi'(\xi) < 0$$

zbieżność oscylująca



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



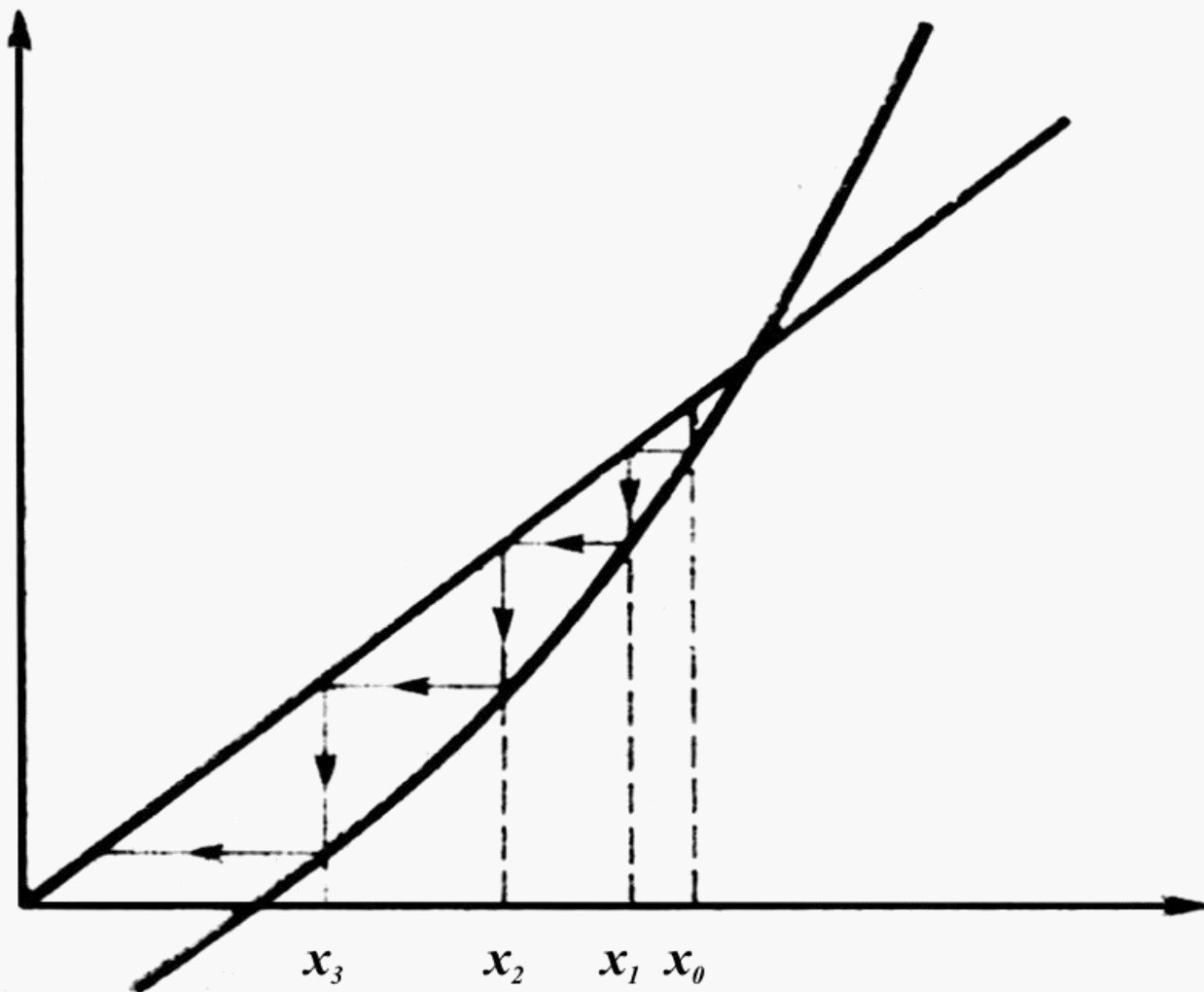
Politechnika Warszawska



OMNIS

Zbieżność algorytmu – algorytmy rozbieżne

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



$$\Phi'(\xi) > 1$$

rozbieżność monotoniczna



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



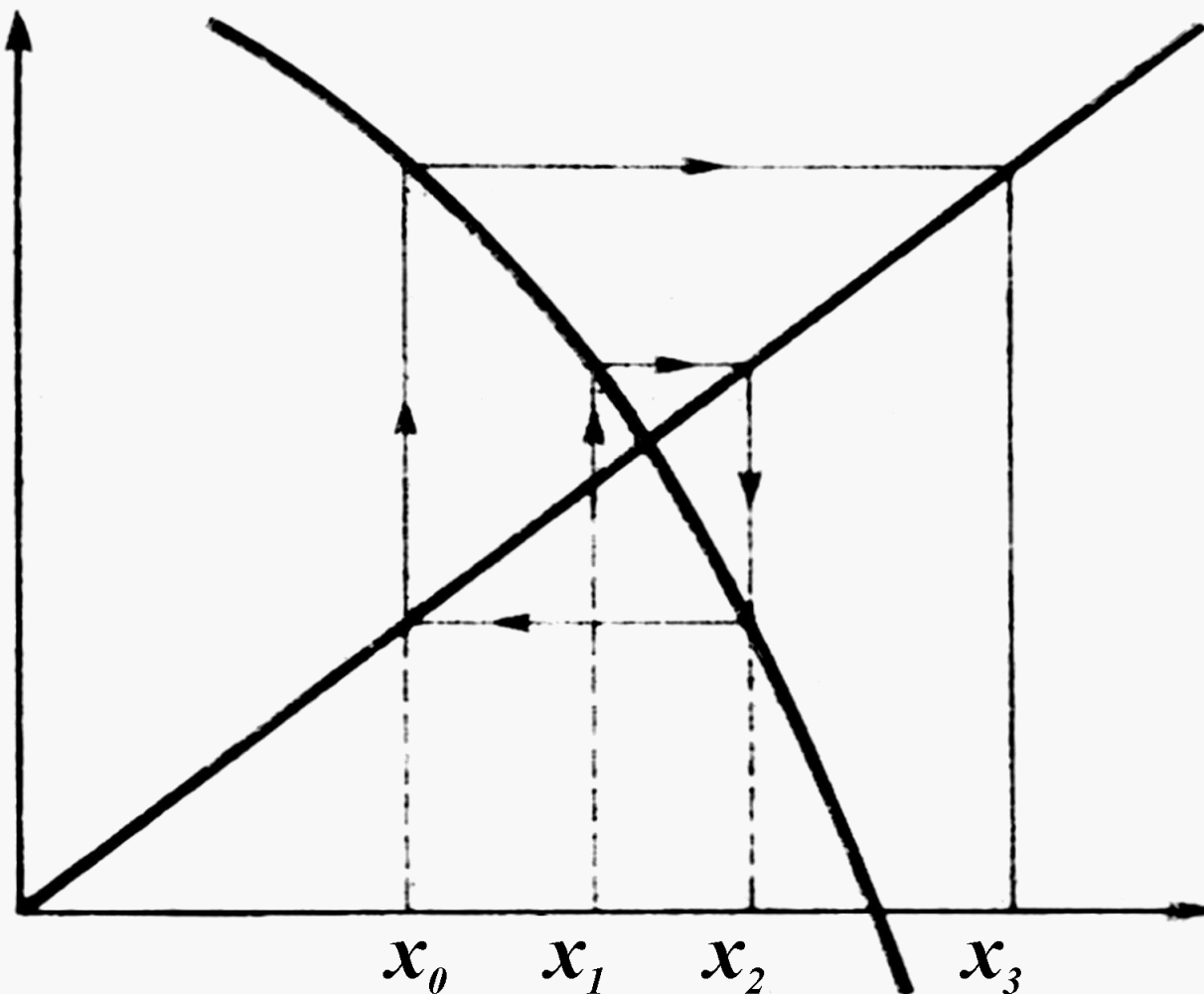
Politechnika Warszawska



OMNIS

Zbieżność algorytmu – algorytmy rozbieżne

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

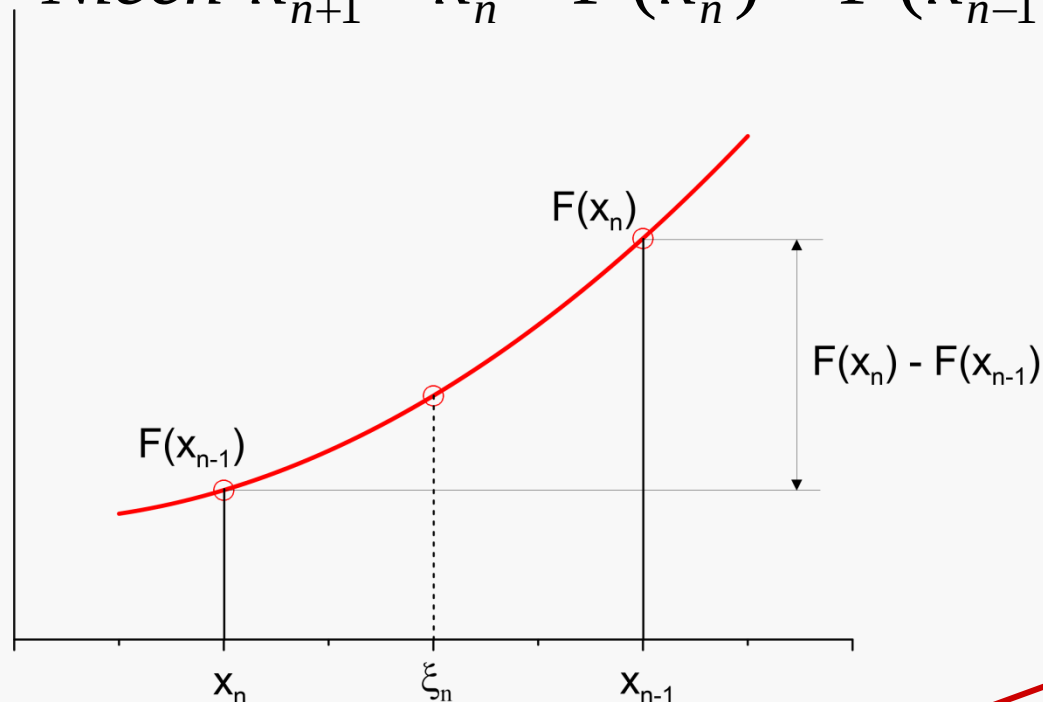


$$\Phi'(\xi) < -1$$

rozbieżność oscylująca



$$\text{Niech } x_{n+1} - x_n = F(x_n) - F(x_{n-1}) = F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$



Z twierdzenia
o wartości średniej

Bo kolejny przyrost $x_n - x_{n-1}$
musi być mniejszy od
poprzedniego

Mamy więc:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = F'(\xi_n) < 1$$

Tak więc zbieżność jest zapewniona, gdy $F'(\xi_n) < 1$ w każdym punkcie przedziału otoczenia α , które zawiera $x_n, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$



Przykład - obliczenie pierwiastka kwadratowego (1/4)

$$x = x^2 + x - c \quad \rightarrow \quad F(x) = x^2 + x - c$$

$$\text{Niech } c=2 ; x_0=1.5$$

$$x_1 = F(1.5) = 2.25 + 1.5 - 2 = 1.75$$

$$x_2 = F(1.75) = 1.75^2 + 1.75 - 2 = 2.8125$$

$$x_3 = F(2.8125) = 8.7226563$$

Proces jest rozbieżny, gdyż :

$$\frac{dF}{dx} = 2x + 1 > 1 \quad \text{gdy } x > 0$$

Algorytm nr 1 - rozbieżny

$$x^2 = c$$



Przykład - obliczenie pierwiastka kwadratowego (2/4)

$$x = \frac{c}{x}$$

$$\text{Niech } c=2 ; x_0=1.5$$

$$x_1 = \frac{2}{x} = 1.33333$$

$$x_2 = \frac{2}{1.33333} = 1.5$$

$$x_3 = \frac{2}{x} = 1.33333$$

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=1.33333; c=2} = -1.1250$$

Algorytm nr 2 - niezbieżny

$$x^2 = c$$

Tak więc nie w każdym punkcie otoczenia α pochodna dF/dx jest mniejsza od 1



Przykład - obliczenie pierwiastka kwadratowego (3/4)

$$x^2 = c \rightarrow 2x^2 = x^2 + c \rightarrow x = \frac{x^2 + c}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{c}{2x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{c}{x} \right)$$

Niech $c=2$; $x_0=1.5$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(1.5 + \frac{2}{1.5} \right) = 1.4166667$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(1.4166667 + \frac{2}{1.4166667} \right) = \underline{1.4142157}$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c}{x^2} \right)$$

Algorytm nr 3 - zbieżny

$$x^2 = c$$

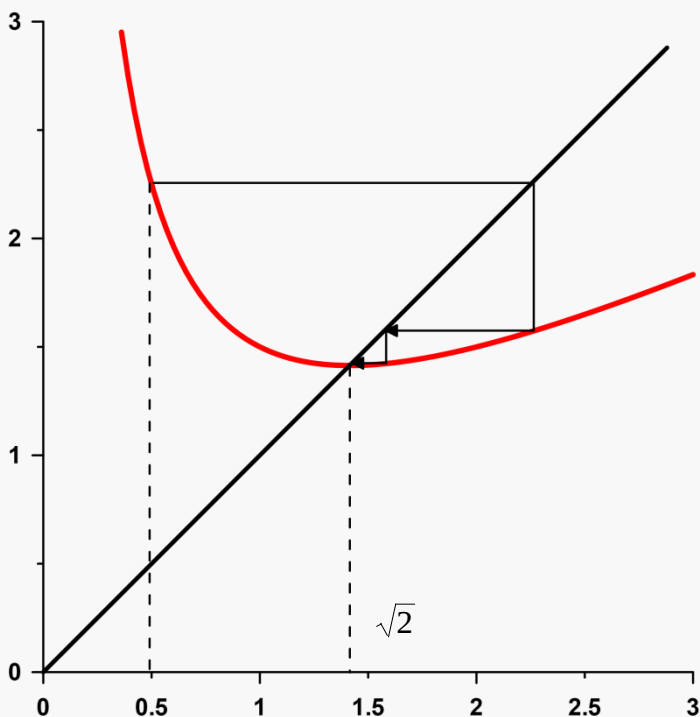
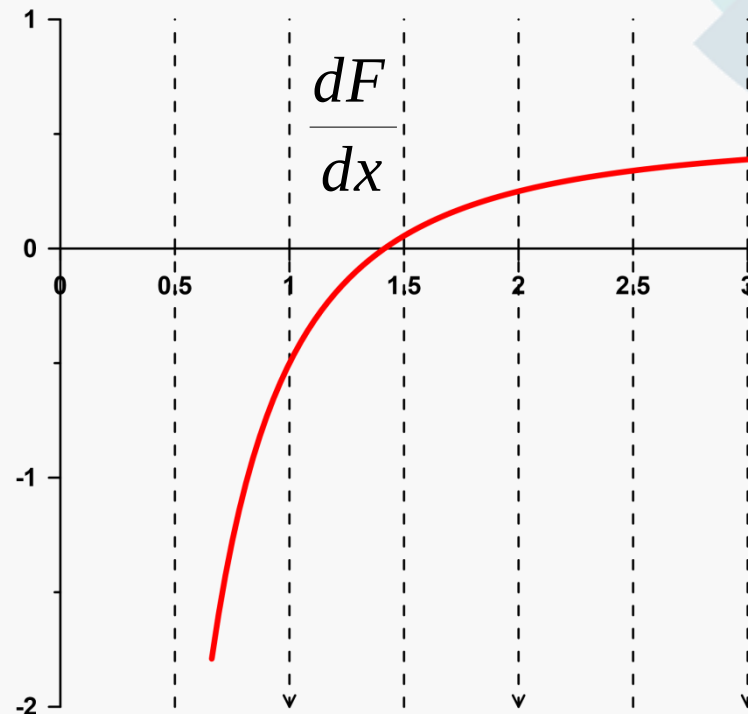
sqrt 2 = **1.4142136**



Przykład - obliczenie pierwiastka kwadratowego (4/4)

 $x^2 = C$ Algorytm nr 3 – zbieżny – cd.

x	1	Sqrt(2)	1.5	2
dF/dx	-1/2	0	0.0555	0.25

Czyli jest to
przypadek nr 1Powyższy algorytm jest podstawą
obliczania pierwiastków
kwadratowych w komputerach



Dobra praktyka inżynierska zazwyczaj nakazuje pracę ze zmiennymi projektowymi, które są w jakiś sposób znormalizowane. Może to polegać na ubezwymiarowaniu podstawowych parametrów, takich jak doskonałość aerodynamiczna, lub na normalizacji poprzez podzielenie przez reprezentatywną liczbę, taką jak maksymalna moc turbiny gazowej.

- przykład zadania: rozwiązanie nieliniowego zagadnienia równowagi w ustalonym locie poziomym; typowe zmienne:
 - kąt natarcia [deg] – typowe wartości od -10 do 15
 - kąt wychylenia steru wysokości [deg] – typowe wartości od -15 do 15
 - ciąg niezbędny [N] – wartości rzędu 10^4 - 10^5
 - skalowanie przez wartość masy samolotu

Z punktu widzenia optymalizacji, nie zawsze pożądane jest ubezwymiarowanie lub normalizowanie parametrów projektowych w taki sam sposób, jak zazwyczaj robimy to w przypadku obliczeń ręcznych lub projektowania wspomaganego komputerowo.



OMNIS

Skalowanie zmiennych

W zadaniach optymalizacji skalujemy zmienne w taki sposób, aby zwiększyć wydajność i niezawodność procesu optymalizacji numerycznej. Rozważmy na przykład minimalizację prostej funkcji dwóch zmiennych.

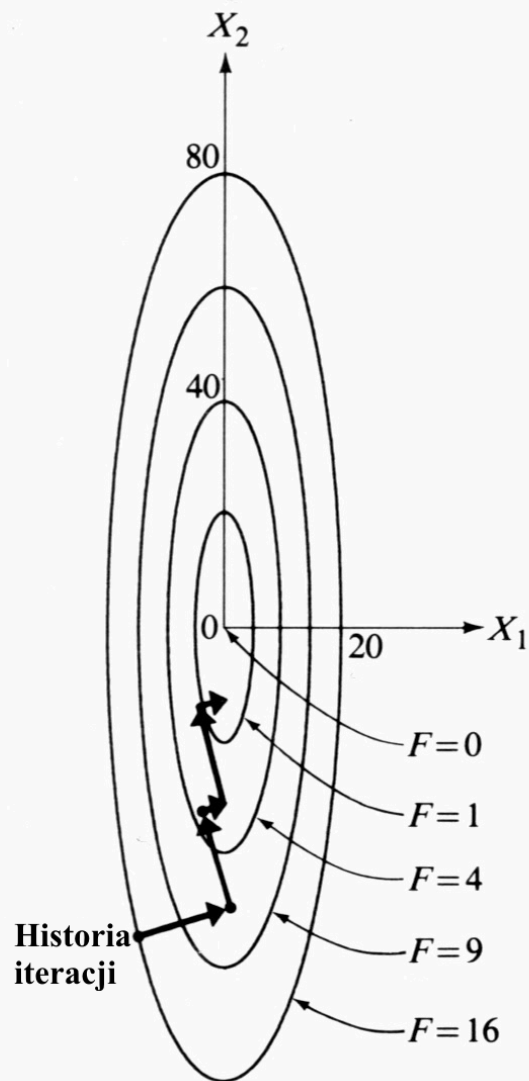
$$F(X_1, X_2) = \left(\frac{X_1}{5}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{20}\right)^2$$



OMNIS

Skalowanie zmiennych

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



Rysunek przedstawia odpowiadającą jej przestrzeń funkcji dwóch zmiennych, która jest ciągiem elips. Jeśli do minimalizacji tej funkcji zostanie użyta, co prawda nieefektywna, metoda największego spadku, historia iteracji będzie taka, jak pokazano na rysunku.

Ze względu na kształt konturów projektu, istnieje niewielkie prawdopodobieństwo osiągnięcia prawdziwego minimum tej funkcji.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



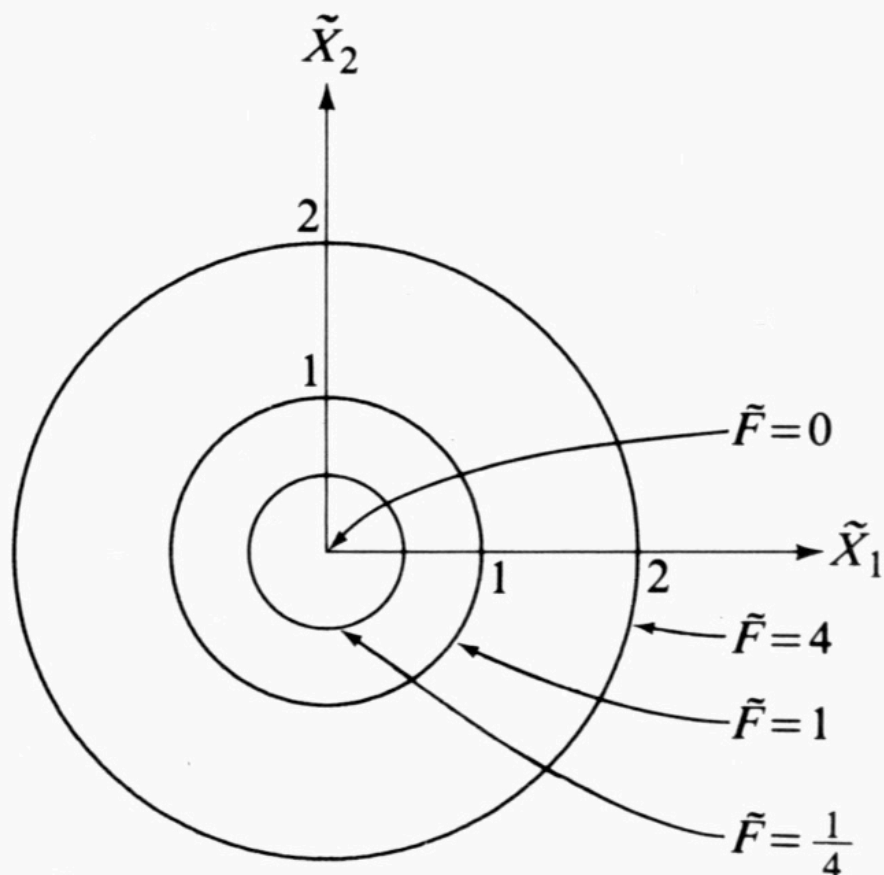
Politechnika Warszawska



OMNIS

Skalowanie zmiennych

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



Weźmy nowe zmienne takie, że

$$X_1 = 5\tilde{X}_1 / \sqrt{2} \quad , \quad X_2 = 20\tilde{X}_2 / \sqrt{2}$$

Funkcja po skalowaniu przybierze postać

$$F(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = \frac{1}{2}[\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2]$$

Przestrzeń funkcji dwóch zmiennych dla tej funkcji jest zbiorem koncentrycznych okręgów, jak pokazano na rysunku. Oczywiście minimum znajduje się teraz w tylko jednej iteracji, nawet przy użyciu metody najszybszego spadku. Rozwiązanie jest jednak takie samo, ponieważ zmienne po prostu zostały przeskalowane. Aby uzyskać optymalny wektor X dla pierwotnego problemu, ponownie przeskalowano zmienne. Wartość funkcji jest taka sama zarówno w przestrzeni przeskalowanej, jak i nieskalowanej.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



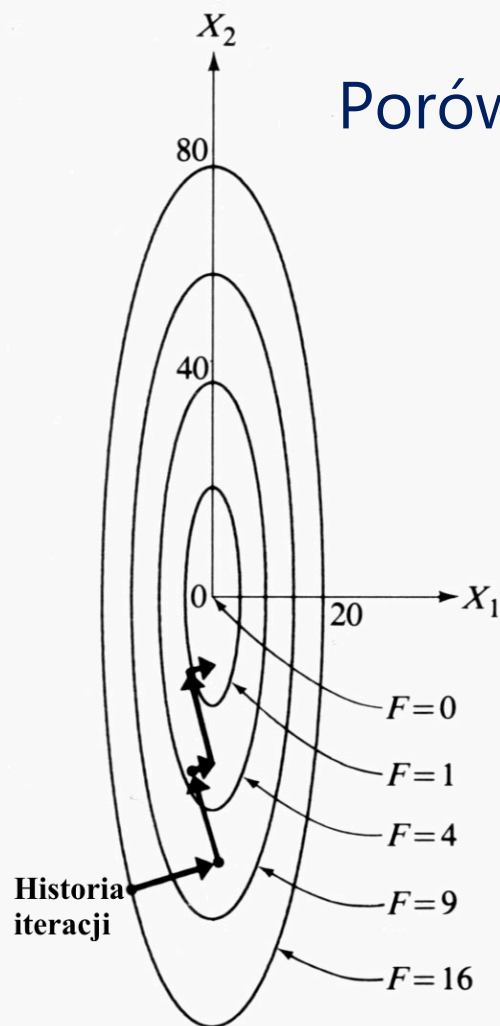
Politechnika Warszawska



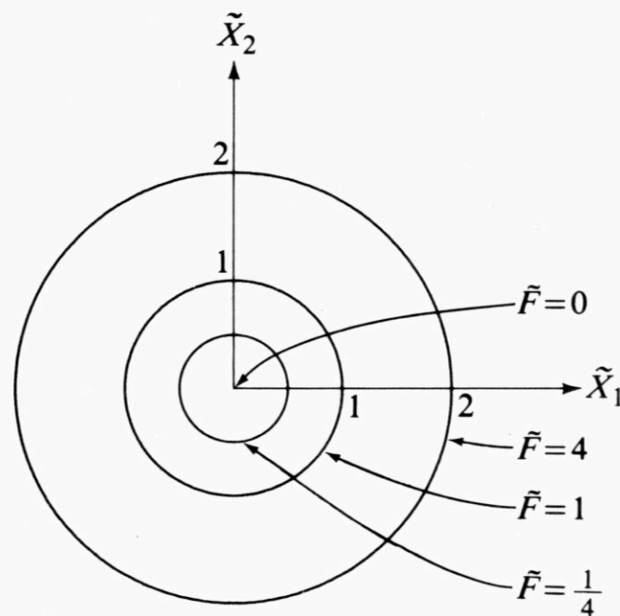
OMNIS

Skalowanie zmiennych

Porównanie zadania oryginalnego i przeskalowanego



(a) oryginalny



(b) skalowany



OMNIS Optymalizacja w inżynierii lotniczej i kosmicznej

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

Dziękuję za uwagę



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska