OMNIS



# Optymalizacja w inżynierii lotniczej i kosmicznej

## Wykład 7

## Matematyczne podstawy optymalizacji 5

***Wstęp do metod niedeterministycznych***

1130-LK000-MSP-1037

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

# Zagadnienia

- Wstęp do metod niedeterministycznych
  - funkcje testowe
  - metody losowe (Monte Carlo)
  - metody ewolucyjne (GA, ES, PSO, ACO, ABC, ...)

# Metody niedeterministyczne



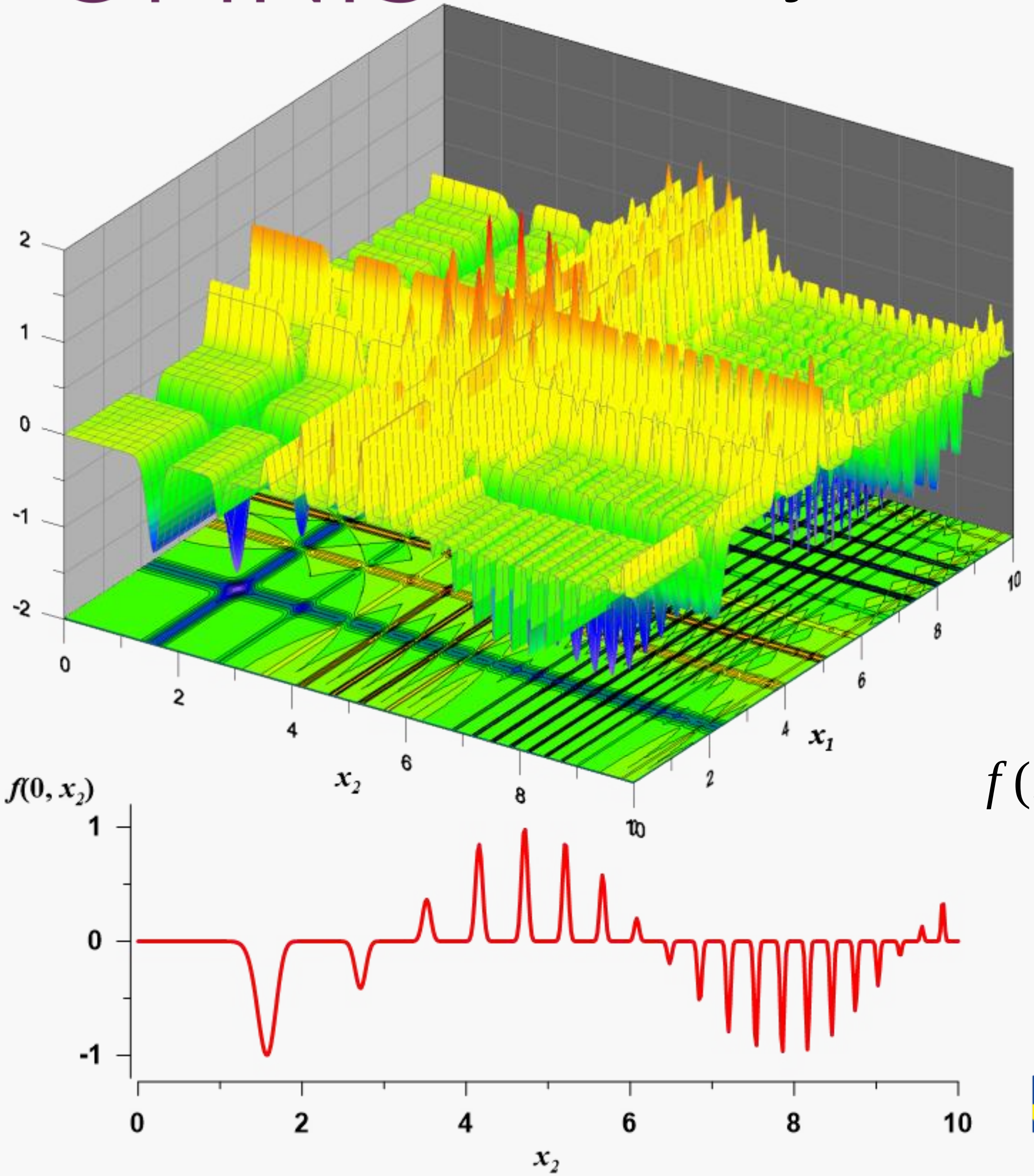
- Rozwiązanie problemów optymalizacji, w których funkcja celu ma wiele minimów lokalnych, jest bardzo trudne (czasem wręcz niemożliwe) metodami gradientowymi.

- Przykładami takich funkcji są specjalne funkcje służące do testowania algorytmów, np. Michalewicza, Schwefela, Rastrigina itp.

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

# Funkcje testowe

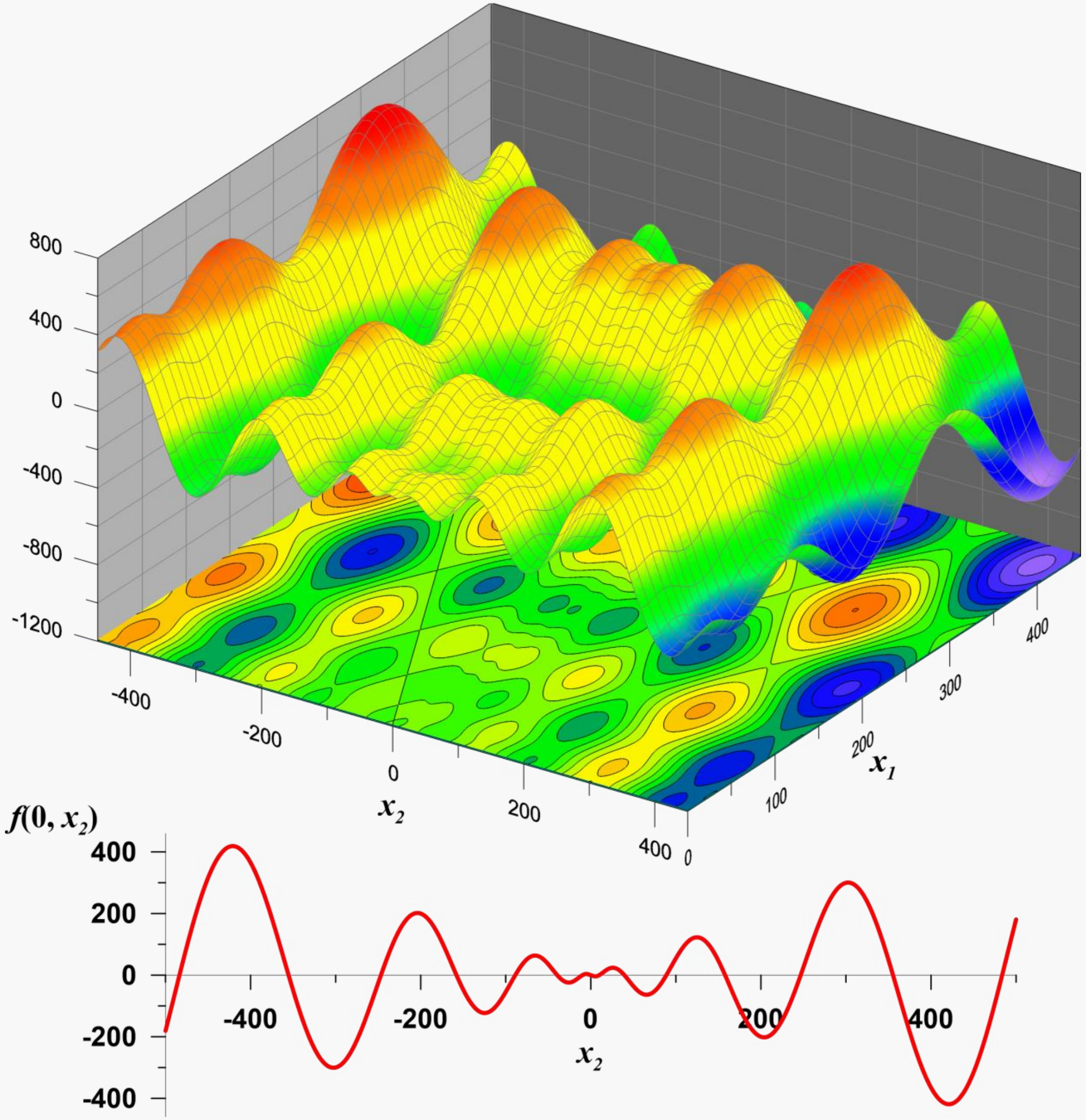





## Funkcja Michalewicza

$$f(x_1, x_2) = -\sin(x_1)\left(\sin\left(\frac{x_1^2}{\pi}\right)\right)^{20} - \sin(x_2)\left(\sin\left(\frac{2x_2^2}{\pi}\right)\right)^{20}$$

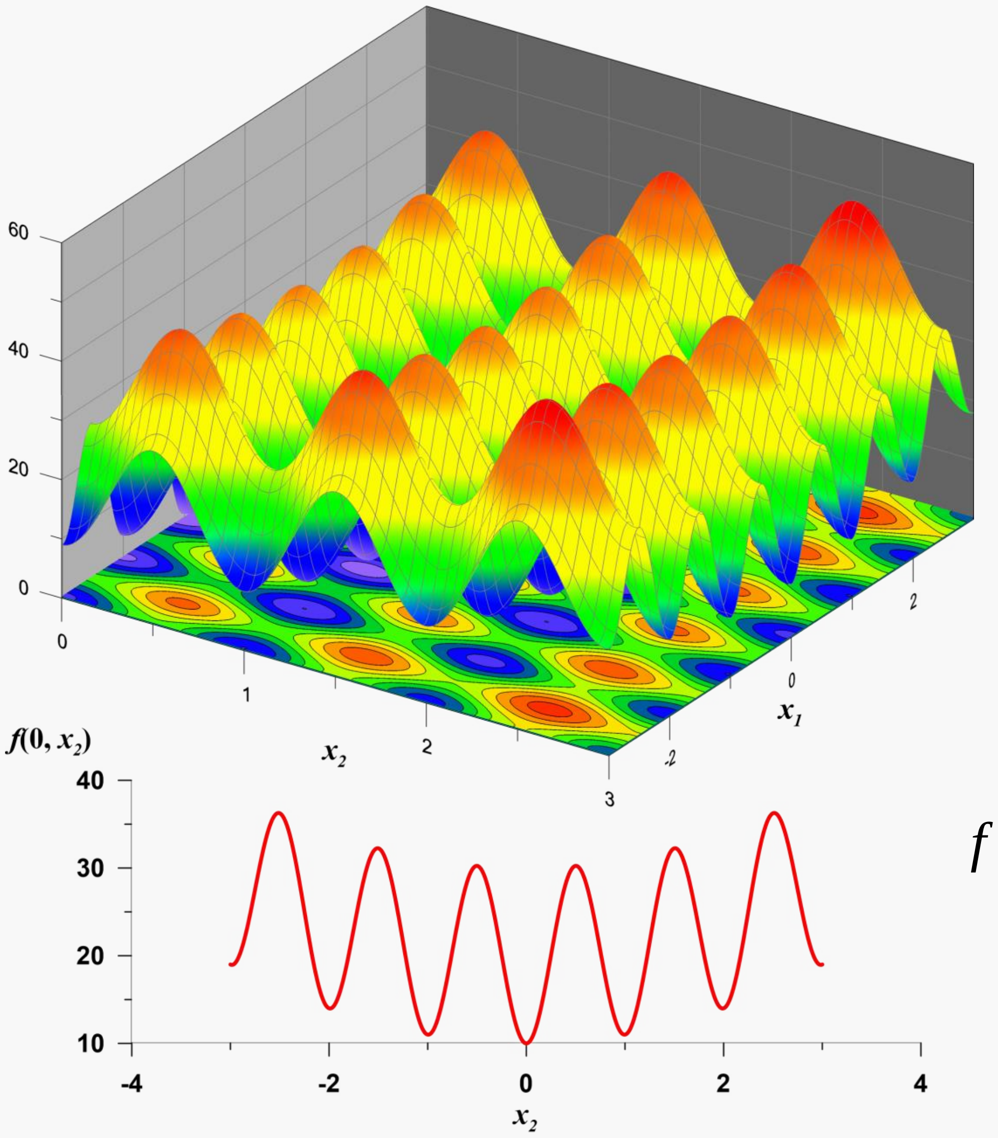
# Funkcje testowe




## Funkcja Schwefela

$$f(x_1, x_2) = -x_1 \sin\sqrt{|x_1|} - x_2 \sin\sqrt{|x_2|}$$

# Funkcje testowe




## Funkcja Rastrigina

$$f(x_1, x_2) = 20 + x_1^2 + x_2^2 - 10(\cos(2\pi\, x_1) + \cos(2\pi\, x_2))$$

# Metody niedeterministyczne - Monte Carlo

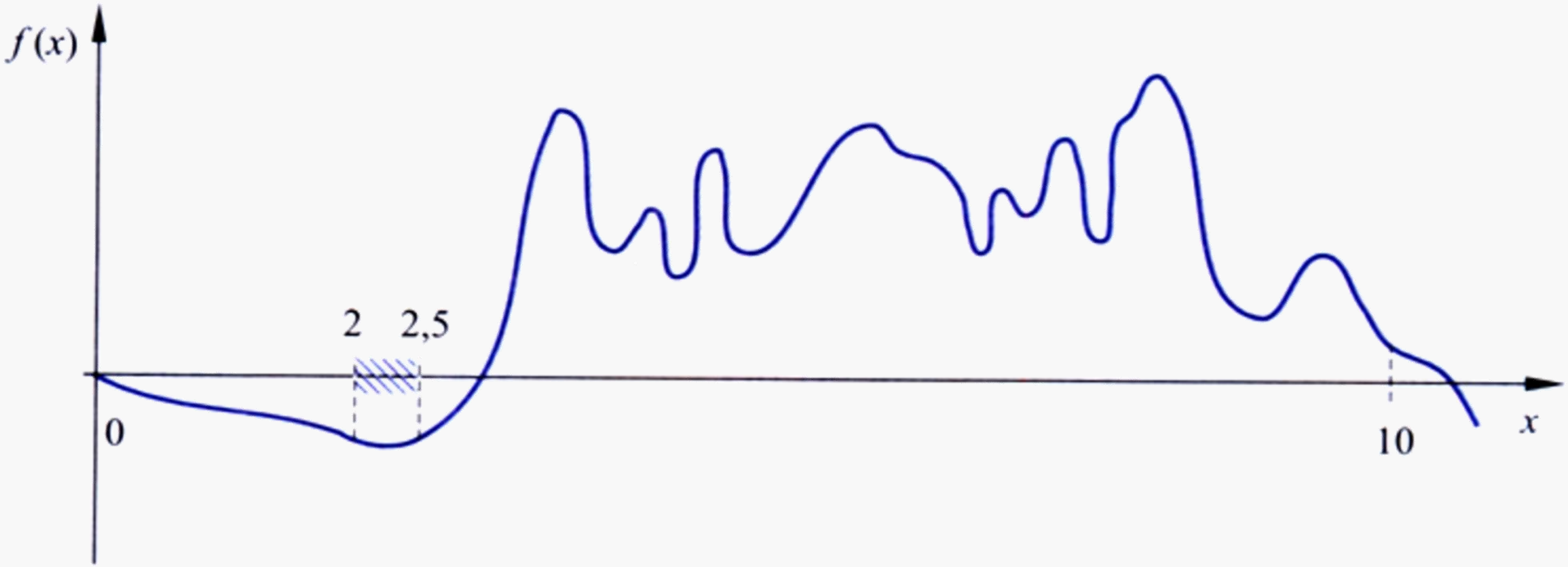


Wszelkie metody wykorzystujące czynnik losowy w rozwiązywaniu złożonych problemów, których rozwiązanie metodami analitycznymi nie jest możliwe. Metody zaliczane do tej grupy wykorzystują elementy rachunku prawdopodobieństwa, analizę statystyczną itp. Zdobywają one coraz większą popularność w wielu dziedzinach, w tym również w optymalizacji, bowiem pozwalają podnieść skuteczność działania rozważanych algorytmów przy stosunkowo niewielkim dodatkowym nakładzie pracy. Do twórców metod Monte Carlo zalicza się polskiego matematyka, Stanisława Ulama (1909-1984).

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

# Metoda Monte Carlo

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}01,\ x_2 = 0{,}02,\ \ldots,\ x_{1000} = 10.$$




Przykładowa, hipotetyczna funkcja o wielu minimach lokalnych

# Metoda Monte Carlo



**Algorytm metody Monte Carlo „orzeł-reszka”**

**Dane wejściowe:** funkcja $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}$, liczba losowanych punktów $N$

wylosuj $N$ punktów $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^N$ ze zbioru $X$<br>
$y^* = f(\mathbf{x}^1)$<br>
$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^1$<br>
**for** i = 2 **to** N **do**<br>
    oblicz $f(\mathbf{x}^i)$<br>
    **if** $f(\mathbf{x}^i) < y^*$ **then**<br>
        $y^* = f(\mathbf{x}^i)$<br>
        $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^i$<br>
    **end if**<br>
**end for**<br>
**return** $\mathbf{x}^*$      $\triangleright$ przybliżone rozwiązanie

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

# Metoda Monte Carlo - przykład



- Przybliżenie minimum funkcji celu:

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

- W przedziale $X$=[0; 2.5]
- Losujemy $N$=10 punktów ze zbioru $X$ i obliczamy wartości funkcji $f$ w tych punktach

# Metoda Monte Carlo - przykład

Wybieramy najmniejszą z wartości funkcji celu i otrzymujemy przybliżenie minimum

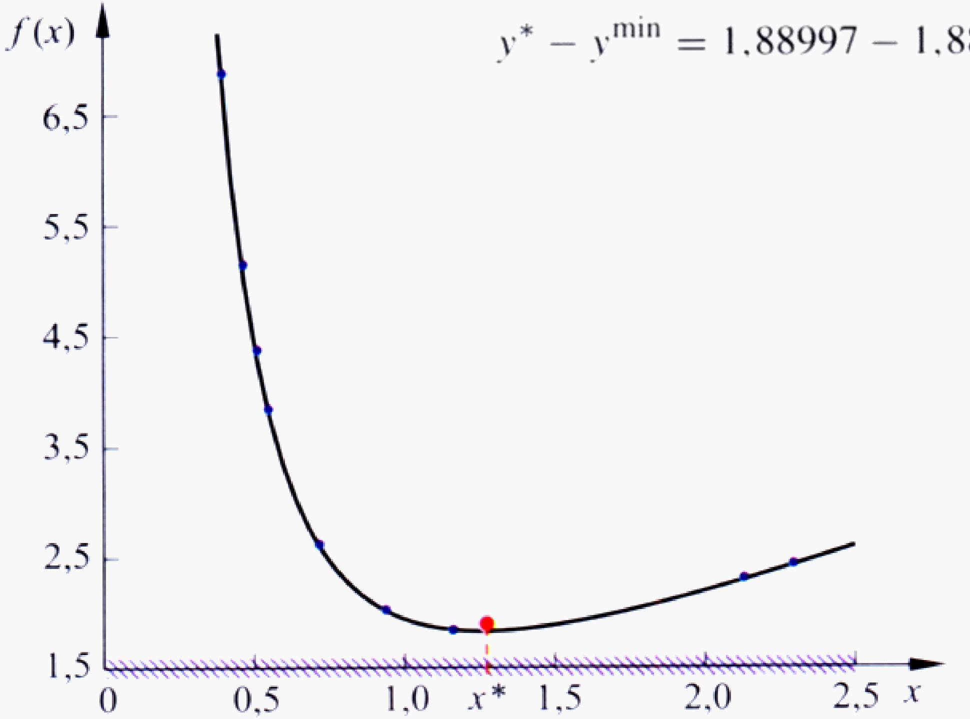
$$x^* = 1{,}2687, \qquad y^* = f(x^*) = 1{,}88997.$$

Jak widać na rysunku jesteśmy blisko rzeczywistego minimum, które znajduje się w punkcie

$$x^{\min} = 1{,}25992, \qquad y^{\min} = f(x^{\min}) = 1{,}88988.$$

Różnica między wyznaczoną wartością a rzeczywistym minimum wynosi

$$y^* - y^{\min} = 1{,}88997 - 1{,}88988 = 0{,}00009.$$

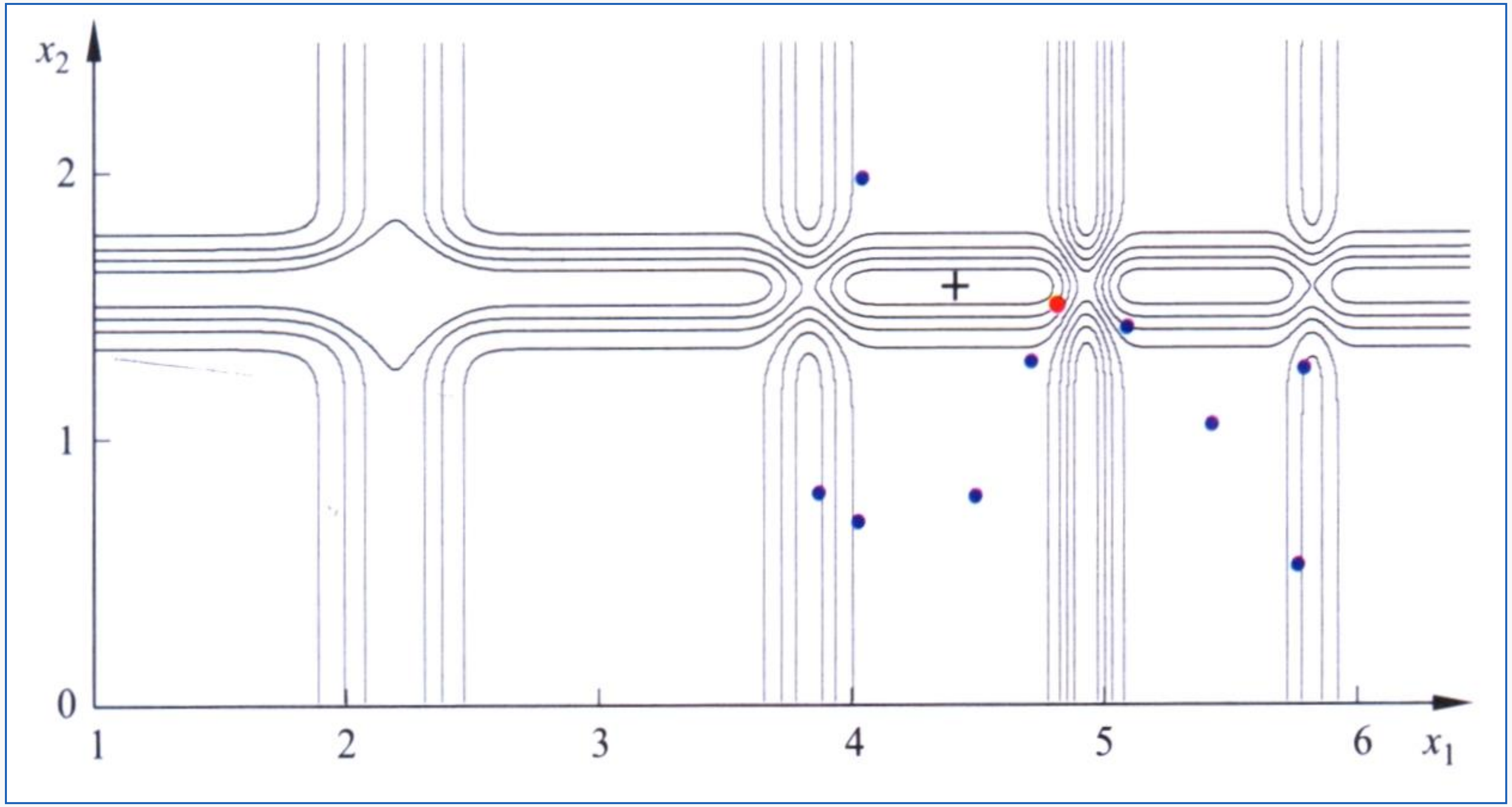


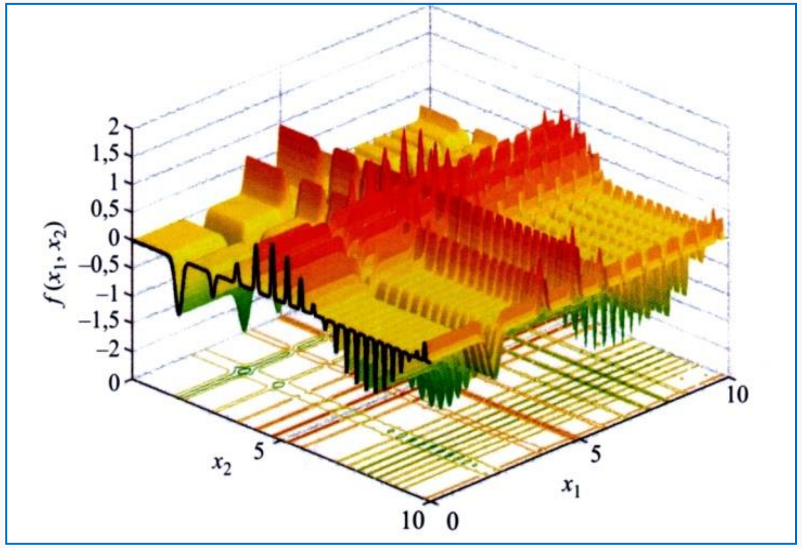

Wyniki działania metody „orzeł-reszka”

| i | xi | f(xi) |
|---|---|---|
| 1 | 1.16081 | 1.90294 |
| 2 | 0.55117 | 3.84294 |
| 3 | 0.39271 | 6.87691 |
| 4 | 0.4622 | 5.14322 |
| 5 | 0.72467 | 2.6289 |
| 6 | 0.50855 | 4.37518 |
| 7 | 2.12431 | 2.34591 |
| 8 | 0.94911 | 2.05922 |
| 9 | 2.28764 | 2.47872 |
| 10 | 1.2687 | 1.88997 |

# Metoda Monte Carlo - przykład

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.




Punkty wyznaczone metodą orzeł-reszka dla funkcji Michalewicza

OMNIS

# Metoda Monte Carlo

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

**Algorytm zmodyfikowanej metody „orzeł-reszka”**

**Dane wejściowe:** funkcja $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}$, liczba losowanych punktów $N$, liczba pełnych przebiegów algorytmu $M$

wylosuj dowolny punkt $\mathbf{x}^R \in X$
$y^R = f(\mathbf{x}^R)$
**for** i = 1 **to** M **do**
    wykonaj $N$ losowań jak w metodzie „orzeł-reszka” i wybierz najlepszy wynik $\mathbf{x}^{(i)}$
    wyznacz minimum lokalne $\mathbf{x}^*$ wybraną metodą deterministyczną, startując z punktu $\mathbf{x}^{(i)}$ (gdy metoda wymaga $m$ punktów startowych wykorzystaj $m$ najlepszych wyników z przeprowadzonych $N$ losowań)
    **if** $f(\mathbf{x}^*) < y^R$ **then**
        $y^R = f(\mathbf{x}^*)$
        $\mathbf{x}^R = \mathbf{x}^*$
    **end if**
**end for**
**return** $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^R$    ▷ przybliżone rozwiązanie

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

# Metody niedeterministyczne – Algorytmy genetyczne

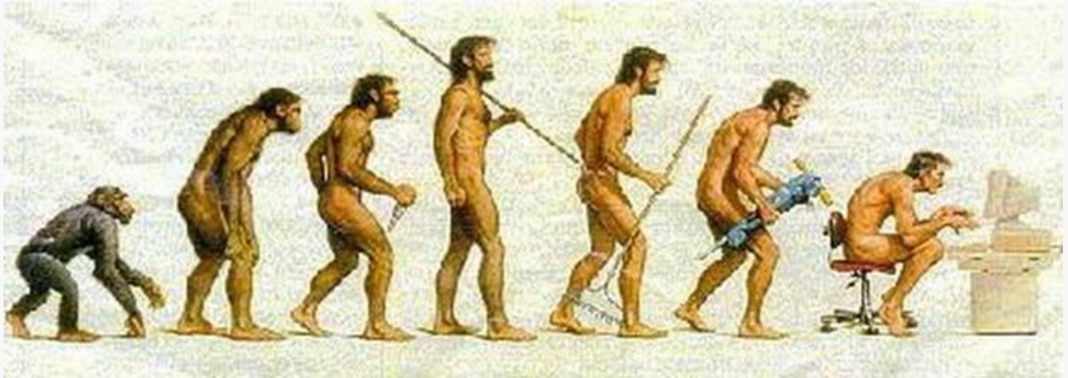


Algorytmy genetyczne są kolejną grupą metod wykorzystujących czynnik losowy. Zaliczane są do narzędzi sztucznej inteligencji, a za twórcę idei tych algorytmów, opartych na zasadach podobnych do tych znanych z genetyki, uważany jest John Holland, który opublikował ją w 1975 r.

Algorytmy genetyczne znajdują wiele zastosowań, miedzy innymi w optymalizacji, i są zaliczane do grupy metod niedeterministycznych. Zachodzi jednak tutaj istotna różnica w porównaniu do podejścia metod Monte Carlo. W algorytmach genetycznych kolejne losowane punkty są bowiem istotnie zależne od punktów otrzymanych wcześniej w tym sensie, że punkty w kolejnych iteracjach są losową modyfikacją punktów otrzymanych w poprzedniej iteracji. Ponadto, do poszukiwania rozwiązań optymalnych wykorzystuje się zakodowaną postać zmiennych optymalizacji.

# Algorytmy Genetyczne (GA)

Motto:



Zamiast pracowicie poszukiwać najlepszego rozwiązania problemu informatycznego lepiej pozwolić, żeby komputer sam sobie to rozwiązanie wyhodował !

# Algorytmy Genetyczne (GA)



- Podstawą Algorytmu Genetycznego jest znany z ewolucji fakt, że największe prawdopodobieństwo przeżycia ma osobnik o najwyższym stopniu przystosowania (oraz jego potomstwo)
- Optymalizacja jako wybór najlepszego rozwiązania jest bliska efektowi znanemu z ewolucji

# Algorytmy Genetyczne (GA) - pojęcia



- Populacja - jest określonym zbiorem osobników,
- Osobnik - zakodowany w postaci chromosomu zbiór parametrów zadania,
- Chromosom - uporządkowany ciąg genów,
- Gen – jest cechą, pojedynczym elementem genotypu,
- Genotyp - to zespół chromosomów danego osobnika (chociaż często jest to po prostu pojedynczy chromosom),
- Fenotyp - to zdekodowana struktura, czyli po prostu zbiór parametrów zadania.

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

# Algorytmy Genetyczne (GA) - pojęcia



- Populacja jest to zbiór osobników (chromosomów). Liczebność populacji jest z góry określona i pozostaje stała podczas całej procedury obliczeń. W trakcie swojego działania algorytm genetyczny będzie modyfikował populację zgodnie z pewnym przyjętym odgórnie schematem. Nazwa populacja nie jest tutaj przypadkowa. Przy tworzeniu nowej populacji stosuje się mechanizmy podobne do mechanizmów obserwowanych w przyrodzie. Mówiąc ogólnie, nowe osobniki są potomkami pary rodzicielskiej pochodzącej od populacji z iteracji wcześniejszej. W ten sposób dziedziczą pewne cechy rodziców z poprzedniej populacji, a jednocześnie nabywają nowych cech, na skutek działania czynnika losowego.

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

# Algorytmy Genetyczne (GA) - pojęcia



- Osobnik (Genotyp, Chromosom) jest obiektem reprezentującym zmienne optymalizacji. Składa się on z uporządkowanego ciągu genów o określonej długości. Ciąg ten stanowi zakodowaną postać punktu w przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych. Mamy tutaj dowolność w wyborze sposobu kodowania, jednak powinien on jak najlepiej odpowiadać rozważanemu problemowi. Najczęściej geny przyjmują tylko dwie wartości: 0 i 1 i wówczas zmienna optymalizacji jest kodowana binarnie. Jak łatwo zauważyć, mając do dyspozycji chromosom o określonej długości (o skończonej liczbie genów), jesteśmy w stanie zakodować tylko skończony zbiór punktów. W praktyce ustala się pewien zbiór reprezentantów dla zbioru dopuszczalnego X.

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

# Algorytmy Genetyczne (GA) - pojęcia



- Funkcja przystosowania jest to funkcja powiązana z funkcją celu analizowanego zadania optymalizacji. Aby algorytm genetyczny mógł działać, musimy dysponować funkcją przystosowania, dla której poszukujemy maksimum. Wartości funkcji przystosowania pozwalają na liczbową ocenę przystosowania poszczególnych chromosomów. Zgodnie bowiem z główną ideą algorytmów genetycznych, chodzi o to, aby populacje chromosomów w kolejnych iteracjach były lepiej przystosowane niż populacje wcześniejsze.

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

# Algorytmy Genetyczne (GA) - postępowanie



- określenie sposobu kodowania rzeczywistych parametrów problemu w postaci chromosomu,
- przyjęcie postaci funkcji przystosowania oceniającej analizowany zestaw parametrów pod względem jakości poszukiwanego rozwiązania,
- losowy dobór punktów startowego zestawu parametrów,
- selekcja najlepiej przystosowanych chromosomów do nowej populacji,
- zastosowanie na nowej populacji operatorów genetycznych w postaci krzyżowania i mutacji,
- sprawdzenie wartości funkcji przystosowania.

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

# Strategie Ewolucyjne (ES)



Strategie Ewolucyjne to klasa algorytmów optymalizacyjnych inspirowanych procesami biologicznej ewolucji, stosowanych głównie do rozwiązywania problemów w przestrzeniach ciągłych. Zostały opracowane w latach 60. przez Ingo Rechenberga i Hansa-Paula Schwefela jako narzędzie do inżynierskiej optymalizacji kształtów.

Kluczowe cechy strategii ewolucyjnych:

- Reprezentacja rzeczywista: W przeciwieństwie do klasycznych algorytmów genetycznych (często operujących na ciągach binarnych), ES pracują bezpośrednio na wektorach liczb rzeczywistych.
- Główna rola mutacji: Mutacja jest kluczowym operatorem, zazwyczaj realizowanym poprzez dodanie do zmiennych losowych wartości o rozkładzie normalnym (Gaussa).
- Samoadaptacja: Algorytmy te potrafią jednocześnie ewoluować rozwiązanie oraz parametry samej strategii (np. zasięg mutacji), co pozwala im automatycznie dostosowywać się do topografii funkcji celu.

# Metody zachowań stadnych



Metody zachowań stadnych
(ang. Swarm Intelligence – inteligencja rojowa)
to algorytmy metaheurystyczne inspirowane zbiorowym zachowaniem grup zwierząt, takich jak ptaki, ryby czy mrówki. Ich zaletą jest to, że proste reguły pojedynczych jednostek prowadzą do powstania złożonej i inteligentnej struktury grupy.

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

OMNIS

# Metody zachowań stadnych - przegląd

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

- Optymalizacja rojem cząstek (PSO – Particle Swarm Optimization)
  - Inspirowana stadem ptaków szukających pożywienia. Każda „cząstka" porusza się w przestrzeni rozwiązań, pamiętając swoją najlepszą pozycję oraz najlepszą pozycję znalezioną przez całe stado.
- Algorytm mrowiska (ACO – Ant Colony Optimization)
  - Oparty na sposobie, w jaki mrówki znajdują najkrótszą drogę do źródła pokarmu za pomocą feromonów.
- Algorytm sztucznej kolonii pszczół (ABC – Artificial Bee Colony)
  - Modeluje proces zbierania nektaru przez pszczoły. Wyróżnia się trzy grupy pszczół: robotnice (eksploatują znane źródła), obserwatorki (wybierają źródła na podstawie tańca robotnic) oraz zwiadowców (szukają nowych terenów).
- Algorytm świetlika (Firefly Algorithm)
  - Wykorzystuje zjawisko przyciągania się świetlików za pomocą światła.
- Algorytm kukułki (Cuckoo Search)
  - Inspirowany pasożytnictwem lęgowym kukułek. Algorytm opiera się na strategii podrzucania jaj do obcych gniazd i tzw. lotach Lévy'ego (długich skokach w poszukiwaniu nowych obszarów).

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

# Dziękuję za uwagę

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska