Równania i wzory przydatne do wyznaczenia drgań własnych samolotu

(postać uproszczona)

Równania sił:

$$X - mg\sin\theta = m(\dot{u} + qw - rv)$$
$$Y + mg\cos\theta\sin\phi = m(\dot{v} + ru - pw)$$
$$Z + mg\cos\theta\cos\phi = m(\dot{w} + pv - qu)$$

Równania momentów:

$$L = I_x\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + qr(I_z - I_y) - I_{xz}pq$$
$$M = I_y\dot{q} + rq(I_x - I_z) + I_{xz}(p^2 - r^2)$$
$$N = -I_{xz}\dot{p} + I_z\dot{r} + + pq(I_y - I_x) + I_{xz}qr$$

Prędkości kątowe w układzie samolotowym:

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta$$
$$q = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi$$
$$r = \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi$$

Pochodne kątów Eulera w funkcji prędkości kątowych:

$$\dot{\theta} = q\cos\phi - r\sin\phi$$
$$\dot{\phi} = p + q\tan\theta\sin\phi + r\tan\theta\cos\phi$$
$$\dot{\psi} = (q\sin\phi + r\cos\phi)\sec\theta$$

Transformacje prędkości liniowych z układu samolotowego do układu inercyjnego (nieruchomego):

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\sin\phi + & \sin\phi\sin\psi + \\ & -\cos\phi\sin\psi & +\sin\theta\cos\phi\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + & \sin\theta\cos\phi\sin\psi + \\ & +\cos\phi\sin\psi & -\cos\psi\sin\phi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Prędkości, siły, momenty i wychylenia jako sumy składowych ustalonych (z indeksem 0) oraz składowych zaburzeń (Δ):

$u = u_0 + \Delta u$
$v = v_0 + \Delta v$
$w = w_0 + \Delta w$

$p = \Delta p$
$q = \Delta q$
$r = \Delta r$

$X = X_0 + \Delta X$
$Y = Y_0 + \Delta Y$
$Z = Z_0 + \Delta Z$

$L = L_0 + \Delta L$
$M = M_0 + \Delta M$
$N = N_0 + \Delta N$

$\delta_e = \delta_{e0} + \Delta\delta_e$
$\delta_r = \delta_{r0} + \Delta\delta_r$
$\delta_a = \delta_{a0} + \Delta\delta_a$

Definicje pochodnych aerodynamicznych bezwymiarowych współczynników sił i momentów:

Pochodne względem składowej prędkości *u* :

współczynnika siły oporu:

$$C_{D_u} = \frac{\partial C_D}{\partial\left(\frac{u}{u_0}\right)} \quad ,$$

współczynnika siły nośnej:

$$C_{L_u} = \frac{\partial C_L}{\partial\left(\frac{u}{u_0}\right)} \quad ,$$

współczynnika momentu pochylającego:

$$C_{m_u} = \frac{\partial C_m}{\partial\left(\frac{u}{u_0}\right)} \quad .$$

Pochodne względem kąta natarcia (składowej prędkości *w*) :

współczynnika siły oporu:

$$C_{D_\alpha} = \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \quad ,$$

współczynnika siły nośnej:

$$C_{L_\alpha} = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \quad ,$$

współczynnika momentu pochylającego:

$$C_{m_\alpha} = \frac{\partial c_m}{\partial \alpha} \quad .$$

Pochodne względem pochodnej kąta natarcia (składowej przyspieszenia $\dot{w}$) :

współczynnika siły nośnej:

$$C_{z_{\dot\alpha}} = \frac{\partial C_z}{\partial\left(\frac{\dot\alpha\, c_a}{2u_0}\right)} \cong -2\frac{l_H\, S_H}{c_a\, S} a_1 \left(\frac{u_H}{u_0}\right)^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}$$

współczynnika momentu pochylającego:

$$C_{m_{\dot\alpha}} = \frac{\partial C_m}{\partial\left(\frac{\dot\alpha\, c_a}{2u_0}\right)} \cong -2\left(\frac{l_H}{c_a}\right)^2 \frac{S_H}{S} a_1 \left(\frac{u_H}{u_0}\right)^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}$$

Pochodne względem prędkości kątowej pochylania *q*:

$$C_{z_q} = \frac{\partial C_z}{\partial\left(\frac{q\, c_a}{2u_0}\right)} \cong -2\frac{l_H\, S_H}{c_a\, S} a_1 \left(\frac{u_H}{u_0}\right)^2$$

$$C_{m_q} = \frac{\partial C_m}{\partial\left(\frac{q\, c_a}{2u_0}\right)}$$

Pochodne względem kąta bocznego ślizgu β (składowej prędkości bocznej v), odpowiednio – siły bocznej (y), momentu przechylającego(l), momentu odcylającego (n):

$$C_{y_\beta} = \frac{\partial c_y}{\partial \beta}$$

$$C_{l_\beta} = \frac{\partial c_l}{\partial \beta}$$

$$C_{n_\beta} = \frac{\partial c_n}{\partial \beta}$$

Pochodne względem prędkości kątowej przechylania (p), odpowiednio – siły bocznej (y), momentu przechylającego(l), momentu odcylającego (n):

$$C_{y_p} = \frac{\partial C_y}{\partial\left(\frac{p\,b}{2u_0}\right)}$$

$$C_{l_p} = \frac{\partial C_l}{\partial\left(\frac{p\,b}{2u_0}\right)}$$

$$C_{n_p} = \frac{\partial C_n}{\partial\left(\frac{p\,b}{2u_0}\right)}$$

Pochodne względem prędkości kątowej odchylania (r), odpowiednio – siły bocznej (y), momentu przechylającego(l), momentu odcylającego (n):

$$C_{y_r} = \frac{\partial C_y}{\partial\left(\frac{r\,b}{2u_0}\right)}$$

$$C_{l_r} = \frac{\partial C_l}{\partial\left(\frac{r\,b}{2u_0}\right)}$$

$$C_{n_r} = \frac{\partial C_n}{\partial\left(\frac{r\,b}{2u_0}\right)}$$

Pochodne „od sterowania”, odpowiednio względem kąta wychylenia steru wysokości δ_e (elevator), kąta wychylenia lotek δ_a (ailerones), steru kierunku δ_r (rudder):

$$C_{z_{\delta_e}} = \frac{\partial C_z}{\partial \delta_e}$$

$$C_{m_{\delta e}} = \frac{\partial C_m}{\partial \delta_e}$$

$$C_{y_{\delta_a}} = \frac{\partial C_y}{\partial \delta_a}$$

$$C_{n_{\delta_a}} = \frac{\partial C_n}{\partial \delta_a}$$

$$C_{l_{\delta_a}} = \frac{\partial C_l}{\partial \delta_a}$$

$$C_{y_{\delta_r}} = \frac{\partial C_y}{\partial \delta_r} = a_{v2} \frac{S_{vu}}{S}$$

$$C_{n_{\delta_r}} = \frac{\partial C_n}{\partial \delta_r} = -a_{v2} \frac{S_{vu}\, l_v}{S\, b}$$

$$C_{l_{\delta_r}} = \frac{\partial C_l}{\partial \delta_r} = a_{v2} \frac{S_{vu}\, z_v}{S\, b}$$

Wymiarowe pochodne stateczności (symetryczne):

$$X_u = \frac{-\left(C_{D_u} + 2C_{D0}\right) QS}{mu_0} \left(s^{-1}\right)$$

$$Z_u = \frac{-\left(C_{L_u} + 2C_{L0}\right) QS}{mu_0} \left(s^{-1}\right)$$

gdzie:

$Q = \frac{1}{2} \rho u_0^2$ jest ciśnieniem dynamicznym,

$C_{L0}; C_{D0}$ - współczynniki siły nośnej i oporu całego samolotu w warunkach ustalonych, odpowiadających danemu obliczeniu stateczności.

$$M_u = C_{m_u} \frac{(QSc)}{u_0 I_y} \left(\frac{1}{m \cdot s} \right)$$

$$X_w = \frac{-\left(C_{D_\alpha} - C_{L0}\right) QS}{m u_0} \left(s^{-1}\right)$$

$$Z_w = \frac{-\left(C_{L\alpha} + C_{D0}\right) QS}{m u_0} \left(s^{-1}\right)$$

$$M_w = C_{m_\alpha} \frac{(QSc)}{u_0 I_y} \left(\frac{1}{m \cdot s} \right)$$

$$Z_{\dot{w}} = -C_{z_{\dot{\alpha}}} \frac{c}{2\mu_0} QS / (u_0 m)$$

$$M_{\dot{w}} = C_{m_{\dot{\alpha}}} \frac{c}{2u_0} \frac{QSc}{u_0 I_y} \left(m^{-1}\right)$$

$$Z_\alpha = u_0 Z_w (m/s)$$

$$M_\alpha = u_0 M_w \left(s^{-2}\right)$$

$$Z_{\dot{\alpha}} = u_0 Z_{\dot{w}} (m/s)$$

$$M_{\dot{\alpha}} = u_0 M_{\dot{w}} \left(s^{-1}\right)$$

$$Z_q = -C_{Z_q} \frac{c}{2\mu_0} QS \ / \ m \quad (m/s)$$

$$M_q = C_{m_q} \frac{c}{2\mu_0} (QSc) I_y \left(s^{-1}\right)$$

Wymiarowe pochodne boczne:

$$Y_\beta = \frac{QSC_{y_\beta}}{m}\left(m/s^2\right)$$

$$Y_p = \frac{QSbC_{y_p}}{2mu_0}\left(m/s\right)$$

$$Y_r = \frac{QSbC_{y_r}}{2mu_0}\left(m/s\right)$$

$$L_\beta = \frac{QSbC_{l_\beta}}{I_x}\left(s^{-2}\right)$$

$$L_p = \frac{QSb^2C_{l_p}}{2I_xu_0}\left(s^{-1}\right)$$

$$L_r = \frac{QSb^2C_{l_r}}{2I_xu_0}\left(s^{-1}\right)$$

$$N_\beta = \frac{QSbC_{n\beta}}{I_z}\left(s^{-2}\right)$$

$$N_p = \frac{QSb^2C_{n_p}}{2I_xu_0}\left(s^{-1}\right)$$

$$N_r = \frac{QSb^2C_{n_r}}{2I_xu_0}\left(s^{-1}\right)$$

Wymiarowe pochodne od sterowania:

$$Z_{\delta_e} = -C_{Z_{\delta_e}} QS/m \ \left(m/s\right)$$

$$M_{\delta e} = C_{m\delta_e} \ \frac{QSc}{I_y} \left(s^{-2}\right)$$

$$Y_{\delta_a} = \frac{QSC_{y_{\delta_a}}}{m} \ \left(m/s^2\right)$$

$$N_{\delta_a} = \frac{QSbC_{n\delta_a}}{I_z} \left(s^{-2}\right)$$

$$L_{\delta a} = \frac{QSbC_{l_{\delta_a}}}{I_x} \left(s^{-2}\right)$$

$$Y_{\delta_r} = \frac{QSC_{y_{\delta r}}}{m} \left(\ m/s^2\right)$$

$$N_{\delta_r} = \frac{QSbC_{n_{\delta r}}}{I_z} \left(s^{-2}\right)$$

$$L_{\delta_r} = \frac{QSbC_{l_{\delta\, r}}}{I_x} \left(s^{-2}\right)$$

Wzory przybliżone na obliczenie na obliczenie częstości drgań nietłumionych ω_n oraz współczynników tłumienia drgań ζ, odpowiadających równaniu oscylatora harmonicznego o postaci:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\,\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2\, x = f(t)$$

- dla fugoidy:

$$\omega_n = \sqrt{2}\,\frac{g}{u_0}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{L/D}$$

- dla oscylacji szybkich:

$$\omega_n = \sqrt{M_q\,\frac{Z_\alpha}{u} - M_\alpha}$$

$$\zeta = -\,\frac{\left[M_q + M_{\dot{\alpha}} + \frac{Z_\alpha}{u_0}\right]}{2\,\omega_n}$$

- dla przechylania:

$$\frac{p_{ss}\,b}{2u_0} = -\frac{C_{l_{\delta_a}}}{C_{l_p}}\,\Delta\delta_a$$

$$\lambda = L_p$$

przy czym p_{ss} – jest prędkością ustalonego przechylania, natomiast λ jest współczynnikiem tłumienia przechylania (wartością własną macierzy stanu)

- dla holendrowania

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Y_\beta\,N_r - N_\beta\,Y_r + u_0\,N_\beta}{u_0}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2\,\omega_n}\,\frac{Y_\beta + u_0\,N_r}{u_0}$$

- dla spirali

$$\lambda = \frac{L_\beta\,N_r - L_r\,N_\beta}{L_\beta}$$